15.I.07

Wiskundige Analyse I, theorie

(= 60% van de punten)

(De bewijzen hoeven niet langer of explicieter te zijn dan in de cursus, en alles wat voorafgaat mag zonder meer gebruikt worden.)

Vraag 1.

1. Formuleer ZONDER BEWIJS de *Veralgemeende Middelwaardestelling.*
2. Formuleer en bewijs de regel van de l'Hospital voor $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ als $g(x)\to+\infty$ en $f(x)\to\pm\infty$.

Vraag 2.

1. Geef, onder de juiste voorwaarden, de formule van Taylor met integraalgedaante van de sluitterm, en bewijs ze voor $n=2$.
2. Bewijs de andere gedaante van de sluitterm (voor algemene n).

Vraag 3.

1. Formuleer ZONDER BEWIJS de M-test van Weierstrass.
2. Formuleer en bewijs de hulpstelling over de convergentie van $f+Jf+J^2f+J^3f+\ldots$. ($U\ni x_0$ een open interval, a,b twee continue functies in U, If de primitieve van f in U die in x_0 nul wordt, $J=-aI-bI^2$.)

Vraag 4. (NIETS BEWIJZEN OF UITLEGGEN)

1. Geef de formele definitie, met alle kwantoren erbij, van (i) $f_n\xrightarrow{A}f$ en (ii) $f_n\overset{A}{\rightrightarrows}f$.
2. Vul aan: $n!\approx\ldots$
3. Vul aan: $\int_0^{\pi/2}\cos^{10}x\,dx=\ldots$ (niet vereenvoudigen)
4. Definieer e^{x+iy} met x en y reëel
5. Geef de Taylorontwikkeling $\sin x=\ldots$ en zeg waar ze convergeert.
6. Beantwoord met JA of NEEN:
   - (a) $1\leqslant 2$
   - (b) als een functie integreerbaar over $]a,b[$ is, dan is ze ook integreerbaar over $[a,b]$
   - (c) een niet-convergente complexe reeks is divergent
   - (d) een complexe machtreeks is gelijkmatig convergent over haar convergentieschijf $B(0,R)$
   - (e) elke afgeleide f' heeft een primitieve
   - (f) elke afgeleide f' is integreerbaar

EINDE THEORIE (TIJD TOT 12.30)

Examen oefeningen Wiskundige Analyse I

1ste Bachelor Wiskunde
1ste Bachelor Fysica en Sterrenkunde
Eerste zittijd 2006-2007

(= 40% van de punten)

⋆ *Maak elke oefening op een afzonderlijk blad.*
⋆ *Schrijf op elk blad je naam en richting.*
⋆ *Het gebruik van een rekenmachine is niet toegelaten.*

1. Voor welke waarden van a is de volgende reeks convergent of divergent?

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(n!)^a}{(an)!} \qquad (a \in \mathbb{N}^+)$$

2. (a) Ontwikkel $f(x) := e^x$ $(0 \leq x \leq \pi)$ in een reeks van cosinussen.

   (b) Onderzoek de convergentie van de gevonden reeks (maak een figuur ter verduidelijking).

   (c) Bepaal de reekssom $\sum_{n\geq 1} \frac{2}{4n^2+1}(-1)^n$.

3. Gegeven:

$$x^2y''(x) + 2xy'(x) - 6y(x) = 6x^5$$

   (a) Ga na dat $\varphi_1(x) = x^2$ een oplossing is van de homogene differentiaalvergelijking.

   (b) Bepaal de algemene oplossing van de niet-homogene differentiaalvergelijking.

   (c) Bepaal de oplossing die voldoet aan de volgende beginvoorwaarden:

$$\varphi(1) = \varphi'(1) = \tfrac{1}{4}$$

⋆⋆⋆ Veel succes! ⋆⋆⋆

Tijd tot 12:30