1ste Ba Wiskunde — 14.VI.07

Wiskundige Analyse II, theorie (= 55% van de punten)

(De bewijzen hoeven niet langer of explicieter te zijn dan in de cursus, en alles wat voorafgaat mag zonder meer gebruikt worden.)

Vraag 1.

1. Formuleer de stelling van Bolzano-Weierstrass voor rijen. (Niet bewijzen)
2. Vul aan en bewijs: *Is ... continu en injectief over ..., dan is haar inverse eveneens continu.*

Vraag 2.

1. Definieer 'nulverzameling in $\mathbb{R}^2$'.
2. Definieer 'b.o. continu in de rechthoek R'.
3. Formuleer de stelling van Heine-Borel. (Niet bewijzen.)
4. Bewijs: 'begrensd + b.o. continu $\Longrightarrow$ integreerbaar'. Verduidelijk met schetsje(s).

Vraag 3.

1. Formuleer de M-test van Weierstrass. (Niet bewijzen.)
2. Geef de complexe meetkundige reeks en zeg waar ze convergeert. (Niet bewijzen.)
3. Waar convergeert een complexe machtreeks met convergentiestraal $0 < R < +\infty$ *gelijkmatig*? (Niet bewijzen.)
4. Bewijs het bestaan van de Laurentontwikkeling. Verduidelijk met figuren.
5. Bewijs de enigheid van de Laurentontwikkeling.

Vraag 4. Toon aan dat

$$\frac{1}{2}\arg\left(\frac{i-z}{i+z}\right) - \frac{i}{2}\ln\left|\frac{i-z}{i+z}\right|, \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$$

een uitbreiding is van de reële arctan.

Vraag 5. Beantwoord met JA of NEEN (niets bijvoegen, uitleggen of bewijzen).

1. Elke compacte verzameling kan bedekt worden met één open bal.
2. $|\sin z| \leqslant 1 \iff z \in \mathbb{R}$.
3. $\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = 0 \iff z_0$ is ophefbaar.
4. $\arg z$ is maar bepaald op een 2π-voud na.

EINDE VAN DE THEORIE

Tijd tot 12.30

1ste Ba Wiskunde
14.VI.07
Wiskundige Analyse II a+b, oefeningen
(theorie = 55% van de punten, oefeningen = 45% van de punten)

(i) *Schrijf elke vraag op een apart blad.*
(ii) *Becommentarieer uw werkwijze.*
(iii) *Het gebruik van een rekenmachine is niet toegelaten.*

Veel succes gewenst!

Vraag 1.

(1) Bereken het volume van het omwentelingslichaam dat onstaat door de beeldlijn van $\sin x$, beperkt tot $[0, \pi]$, over een hoek 2π rond de x-as te wentelen.

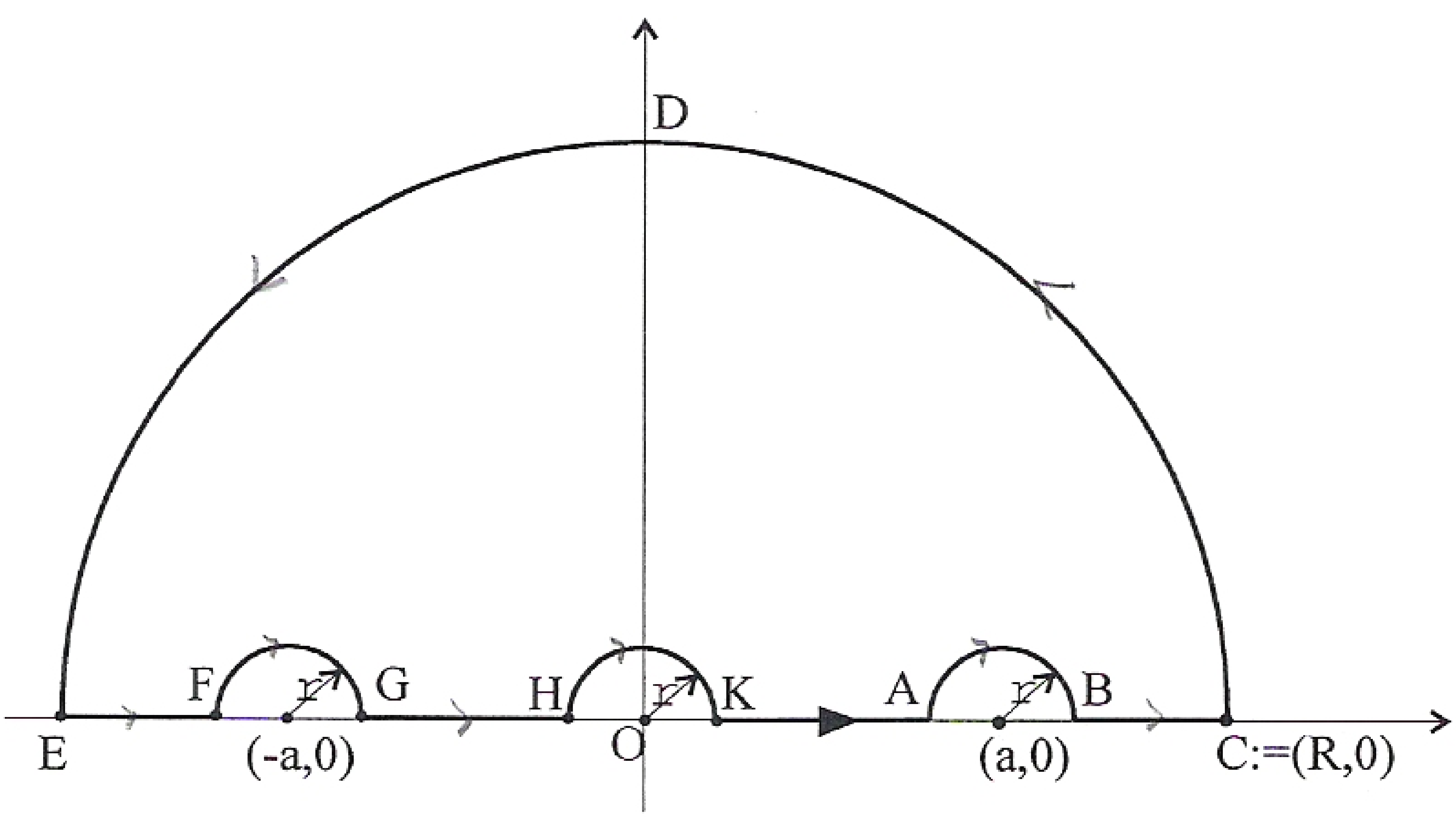
(2) Bereken het volume van het lichaam begrensd door
$$S \leftrightarrow \cos^2 z = x^2 + y^2,$$
en gelegen tussen de vlakken $z = \frac{\pi}{2}$ en $z = -\frac{\pi}{2}$. Hierbij kan de formule $\int_0^1 u \ \arccos u \ du = \frac{\pi}{8}$ nuttig zijn (niet bewijzen).

(3) Vergelijk de antwoorden in (1) en (2) en verklaar.

Vraag 2. Het gebied $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ wordt beschreven door :
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{2} \\ x^2 + y^2 + z^2 \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \\ (x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq z^2 - x^2 - y^2. \end{cases}$$
Bereken, in de meest aangewezen coördinaten, $\iiint_\Omega z \ dxdydz$.

Vraag 3.

(1) Bereken $\oint_\Gamma f(z)dz$, met Γ als in de figuur en
$$f(z) = \frac{e^{iz} - iz - 1}{z^2} \frac{1}{z^4 - a^4}$$
met $a > 0$ constant.



(2) Leid hieruit de waarde af van $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-1+\cos x}{x^2} \frac{1}{x^4 - a^4} \ dx$.

Vraag 4. Bepaal de constanten α, β en γ zo, dat

$$\frac{\frac{3}{2}e^{\alpha z} + \frac{3}{2}e^{-\alpha z} - e^{\beta z} + \gamma z + \gamma}{z^4}$$

een enkelvoudige pool in de oorsprong heeft.

EINDE VAN DE OEFENINGEN

Tijd tot 18.00