Examen Analyse 2 : Theorie. (26 januari 2007)

1. Integralen.

a. Bewijs dat het integratieproces lineair is, m.a.w. de integraal van een lineaire combinatie is gelijk aan de lineaire combinatie van de integralen. Meer precies:

Als :

$$\begin{array}{l} f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \\ g \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \\ (a, b) \in I^2 \\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Dan :

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

b. Geef primitieven van de volgende functies:

1. $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ $(x \in \mathbb{R})$
2. $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ $(x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[)$
3. $\frac{1}{\sin x}$ $(x \in \mathbb{R}\backslash\{k\pi | k \in \mathbb{Z}\})$
4. $\frac{1}{\cos x}$ $(x \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\})$

2. Rijen en reeksen van reële functies.

Bewijs de stelling over de verwisselbaarheid van limiet en integraal, m.a.w.

Stel : $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ een rij van functies met convergentiegebied A en limietfunctie f, $[a, b] \subseteq A$.

Als : $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \underset{g.k.}{\longrightarrow} f$ over $[a, b]$,

$(\forall n \in \mathbb{N}^*)(f_n \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}))$

Dan :

$$\left(\int_a^b f_n(x)dx\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ is convergent naar } \int_a^b f(x)dx$$

m.a.w.

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b (\lim_{n\to+\infty} f_n(x))dx.$$

3. Gewone differentiaalvergelijkingen.

Bewijs de volgende stelling: Stel Φ_1 en Φ_2 twee oplossingen over een interval I van de DV

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0.$$

Als: $(\forall i \in \{0,1,2\})(a_i \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R}))$,
En: $(\forall x \in I)(a_0(x) \neq 0)$,

Dan: $(\forall x \in I)(W(\Phi_1,\Phi_2)(x) \neq 0) \vee (\forall x \in I)(W(\Phi_1,\Phi_2)(x) = 0)$

4. Partiële differentiaalvergelijkingen.

Beschouw de eendimensionale golfvergelijking:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \tag{1}$$

Geef de methode van de scheiding van de variabelen voor deze vergelijking en beschrijf alle oplossingen die men daarmee kan bekomen.

Gent, 26 januari 2007

Prof. W. Govaerts