1e zit 06-07

Oefeningenexamen codeertheorie

Vraag 1 De bedekkingsstraal $\rho = \rho(C)$ van een lineaire $[n, k, d]$-code C over $\mathcal{F}_q$ is de kleinste waarde waarvoor $\mathcal{F}_q^n \subseteq \cup_{x \in C} S(x, \rho)$. Hierbij is $S(x, \rho)$ een bol met middelpunt x en straal ρ. Noteer het aantal combinaties van i uit n als C_n^i. Bewijs de eigenschappen hieronder.

(i) $\sum_{i=0}^{\rho} (q-1)^i C_n^i \geq q^{n-k}$. C^n_i

(ii) Neem twee lineaire codes C_1 en C_2, en beschouw de code $C = C_1 \times C_2 = \{(a, b) : a \in C_1,\ b \in C_2\}$. Dan geldt

$$\rho(C_1 \times C_2) = \rho(C_1) + \rho(C_2).$$

(iii) ρ is het grootste gewicht van een nevenklasseleider in het Slepian standaardrooster voor C.

(iv) Als H een pariteitscontrolematrix is voor C, dan is ρ het kleinste getal zodat elk syndroom een ~~som~~ lico is van ρ of minder kolommen van H.

Vraag 2 Gegeven een $[n, k]$ MDS-code C en een natuurlijk getal x. Voor een bepaalde ontvangen vector y construeer je een bipartiete graaf G. Je neemt als linkse knopen de posities van de symbolen van y, dus n linkse knopen. Als rechtse knopen neem je s codewoorden $c_1, \cdots, c_s$ die in ten minste x posities overeenstemmen met y. Een linkse knoop i en een rechtse knoop c_j worden met elkaar verbonden als de ontvangen vector y in de positie i overeenstemt met codewoord c_j.

(i) Toon aan dat twee codewoorden, die beide een rechtse knoop representeren, niet met y kunnen overeenkomen in een zelfde verzameling van k posities. Besluit dat G de complete bipartiete graaf $K_{k,2}$ niet als deelgraaf bevat.

(ii) Gooi bogen weg totdat elke rechtse knoop exact graad x heeft. De graad die een linkse knoop i heeft na deze procedure noteren we u_i. Stel een verband op tussen s, x en de u_i's.

ongelijkheid
→ na wegsmijten bogen

(iii) Bereken B, dit is het gemiddeld aantal gemeenschappelijke buren dat twee verschillende codewoorden (rechtse knopen) hebben.

vrije u_i's

→ kies u_i's zodanig dat B minimaal ($u_i \in \mathbb{R}$ zelfs!)

(iv) Bepaal wanneer B minimaal is. Combineer dit met (i) om aan te tonen dat als $x^2 > n(k-1)$, dan volgende ongelijkheid geldt.

$$s \leq \frac{n(x - (k-1))}{x^2 - (k-1)n}.$$