29.I.07

Wiskundige Analyse III, theorie
(= 70% van de punten)

(De bewijzen hoeven niet langer of explicieter te zijn dan in de cursus, en alles wat voorafgaat mag zonder meer gebruikt worden.)

Vraag 1.

1. Geef (ZONDER BEWIJS) de voorwaarden waaronder $\Phi(V)) \leqslant (1+\varepsilon)\,\mathrm{opp}(V)$.
2. Bewijs, onder de juiste voorwaarden, dat $\lambda_2(\Phi(V)) \geqslant (1-\varepsilon)\,\mathrm{opp}(V)$. Maak ook de bijhorende figuur. (Enkel de figuur voor deze ongelijkheid.)

Vraag 2. Definieer $(\mathcal{A}\times\mathcal{B})^0$ en $(\mu\times\nu)^0$, en bewijs dat $(X\times Y, (\mathcal{A}\times\mathcal{B})^0, (\mu\times\nu)^0)$ een premaatruimte is.

Vraag 3.

1. Bewijs dat elke meetbare $f : X \to [0, +\infty]$ de limiet van een stijgende rij nietnegatieve simpele afbeeldingen is. Maak ook een figuur.
2. Wat weten we over de integreerbaarheid van die simpele afbeeldingen? Bewijs.

Vraag 4. Formuleer en bewijs Radon-Nikodým voor $\nu \ll \mu$ en eindig. (Wat uit vorige gevallen overgenomen kan worden, mag zonder bewijs overgenomen worden.)

Vraag 5. (NIETS UITLEGGEN OF BEWIJZEN)

1. Geef (enkel de formule, geen proza)
   (a) de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz voor integralen.
   (b) de definitie van $f * g$.
2. Beantwoord met JA of NEEN
   (a) De afstand tussen twee disjuncte gesloten verzamelingen is positief.
   (b) Elke maat is tevens een uitwendige maat.
   (c) Elke nietnegatieve meetbare afbeelding heeft een integraal.
   (d) Een functie met oneindige waarden kan integreerbaar zijn.
   (e) $\mathbb{Q}^2$ is een λ-nulverzameling.
   (f) Als een rij meetbare functies b.o. convergeert naar f, dan is f meetbaar.
   (g) Elke $\frac{d\nu}{d\mu}$ is μ-integreerbaar.
   (h) Elke $\mu\times\nu$ is volledig.

EINDE THEORIE

Wie zijn theorie afgegeven heeft (dat moet ten laatste om 11.30 gebeuren) krijgt de opgave voor een oefening. Bij het oplossen daarvan mag men de syllabus en de in de loop van het semester behandelde oefeningen vrij consulteren. De oefening moet ten laatste om 12.30 afgegeven worden.