

Examen Kwantummechanica I: 9 januari 2007

OEFENINGEN

BIJ HET OPLOSSEN VAN HET OEFENINGENGEDEELTE MOGEN ENKEL DE CURSUSNOTA'S EN HET HANDBOEK "QUANTUM MECHANICS" VAN BRANSDEN EN JOACHAIN GEBRUIKT WORDEN.

OEFENING 1 (10 PUNTEN)

Beschouw twee hermitische operatoren \hat{P} en \hat{Q} .

1. Bepaal een algemene uitdrukking die de afgeleide van de verwachtingswaarde van het product

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{P}\hat{Q} \rangle ,$$

in verband brengt met de Hamiltoniaan van het systeem.

2. Beschouw een tweedimensionaal systeem beschreven door een Hamiltoniaan van het type

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{\hat{p}_y^2}{2m} + V(x, y) ,$$

en bereken

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{x}^2 \rangle , \frac{d}{dt} \langle \hat{p}_x^2 \rangle , \frac{d}{dt} \langle \hat{p}_y^2 \rangle , \frac{d}{dt} \langle \hat{x}\hat{y} \rangle .$$

3. Beschouw een ééndimensionaal systeem beschreven door een Hamiltoniaan van het type

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + V(x) .$$

Bepaal de voorwaarden waaraan $V(x)$ moet voldoen opdat de volgende gelijkheid zou gelden

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{x}^2 \rangle = \mathcal{C} \frac{d}{dt} \langle \hat{p}_x^2 \rangle ,$$

waarbij \mathcal{C} een arbitraire constante is.

OEFENING 2 (10 PUNTEN)

Een deeltje met massa m beweegt in één dimensie in een potentiaal gegeven door:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq a \\ +\infty, & x > a \text{ en } x < 0, \end{cases}$$

en wordt op het tijdstip $t = 0$ in een toestand gebracht die beschreven wordt door de volgende golf functie:

$$\Psi(x, t = 0) = Ax(a - x) \quad 0 \leq x \leq a.$$

1. Wat is de waarde van $\Psi(x, t = 0)$ voor $x > a$ en $x < 0$?
2. Bepaal de normeringsconstante A .
3. Bepaal de energie-eigenwaarden en de eigenfuncties van het probleem in kwestie.
4. De grondtoestandsenergie E_1 voor het probleem in kwestie wordt gegeven door

$$E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m a^2}.$$

Wat is de waarschijnlijkheid om bij een meting van de energie op tijdstip $t = 0$ de waarde E_1 te vinden wanneer het deeltje zich bevindt in de hierboven gespecificeerde $\Psi(x, t = 0)$?

5. Bepaal de golf functie $\Psi(x, t)$ op een arbitrair tijdstip t .
6. Wat is de waarschijnlijkheid om bij een meting van de energie op een arbitrair tijdstip t de waarde E_1 te vinden?
7. De tweede aangeslagen toestand heeft een energie-eigenwaarde

$$E_3 = \frac{\hbar^2 \pi^2 3^2}{2m a^2}.$$

Wat is de waarschijnlijkheid om bij een meting van de energie op een arbitrair tijdstip t de waarde E_3 te vinden?