Lineaire Algebra en Analytische Meetkunde

Eerste Bachelor Wiskunde
Eerste Bachelor Fysica en Sterrenkunde 2 februari 2007

1. (a) Onderstel dat W een deelruimte is van de Euclidische vectorruimte $\mathbb{R}^n$.
   Geef de definitie van het orthogonaal complement $W^\perp$ van W in $\mathbb{R}^n$ en bewijs dat $W^\perp$ een deelruimte van $\mathbb{R}^n$ is.
   (b) Bewijs dat voor elke deelruimte W van $\mathbb{R}^n$ geldt dat $W \oplus W^\perp = \mathbb{R}^n$.
   (c) Onderstel dat W de vectorrechte van $\mathbb{R}^n$ is, die voortgebracht wordt door de vector $\vec{w}(\neq \vec{0})$. Elke vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ kan ontbonden worden als $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ met $\vec{v}_1 \in W$ en $\vec{v}_2 \in W^\perp$. Bepaal de uitdrukkingen van $\vec{v}_1$ en van $\vec{v}_2$.

2. Onderstel dat $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ een lineaire afbeelding is met $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ 2 aan 2 verschillende eigenwaarden en met $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_r$ eigenvectoren die respectievelijk behoren bij $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$. Dan is $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_r\}$ een lineaire onafhankelijke verzameling vectoren en de deelruimte W opgespannen door $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_r$ is invariant voor f. Bewijs!

3. (a) De loodlijn uit een punt $p_0(\vec{r}_0(p_1^0, \cdots, p_n^0))$ op een hypervlak met vergelijking $\sum_{i=1}^n a_i x_i + a_{n+1} = 0$.
   Bepaal de afstand van dat punt tot dat hypervlak.
   (b) T.o.v. het orthonormaal coördinatenstelsel $(o; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ van de driedimensionale Euclidische ruimte wordt de kwadriek $\mathcal{K}$ voorgesteld door

$$F(x, y, z) = \xi^t A \xi + 2(a_{14} a_{24} a_{34})\xi + a_{44} = 0 \text{ met } \xi = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

   We gaan over naar een nieuw orthonormaal coördinatenstelsel $(o'; \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ met coördinaten x', y', z' d.m.v. de coördinatentransformatie voorgesteld door

$$\xi = M_0 \xi' + \xi_0 \text{ met } \xi' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \text{ en } \xi_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

Examen theorie LAAM I (vervolg)

en met M_0 een orthogonale matrix.
In het nieuwe coördinatenstelsel wordt de vergelijking van $\mathcal{K}$:

$$F'(x', y', z') = \xi'^t A' \xi' + 2(a'_{14} a'_{24} a'_{34})\xi' + a'_{44} = 0.$$

Geef (met bewijs) de uitdrukkingen van A', van $(a'_{14} a'_{24} a'_{34})$ en van a'_{44}.

Examen oefeningen LAAM I

Vraag 1. Bespreek volgend stelsel in functie van de parameters a and b:

$$\begin{cases} ax + by + 2z & = & 1, \\ ax + (2b-1)y + 3z & = & 1, \\ ax + by + (b+3)z & = & 2b-1. \end{cases}$$

Vraag 2. Beschouw de volgende kwadriek Q in $\mathbb{R}^3$ beschreven door volgende vergelijking:

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + 9z^2 + 10xy - 6xz - 6yz - 38x - 22y + 42z + 109 = 0.$$

Reduceer deze tot zijn standaardvorm. Geef in elke stap telkens de coordinatentransformatie. Welke soort kwadriek is Q?

Hint: 3 is een eigenwaarde