1ste jaar bachelor Wiskunde – groep 2

Examen Lineaire Algebra en Analytische Meetkunde II – Theorie

Academiejaar 2006 – 2007 – 1ste examenperiode

1. Bewijs dat het vlak van Moulton aan de voorwaarden van een axiomatisch affien vlak voldoet. Waarom is dit vlak niet coördinatiseerbaar door een veld?
2. Geef en bewijs de stelling van Menelaos.
3. Hoeveel lineaire vergelijkingen heeft men minimaal nodig om een affiene variëteit van dimensie m te beschrijven in een affiene ruimte $\mathrm{AG}(n, K)$ (verklaar uw antwoord).
4. Bewijs dat een bilineaire vorm reflexief is als en slechts dan als hij symmetrisch of alternerend is.

Lineaire Algebra en Analytische Meetkunde II

Examen oefeningen

Eerste Bachelor Wiskunde — Prof. Dr. F. De Clerck

Eerste zittijd 2006-2007 — Dr. K. Thas

Opgave 1 (*a*) *Beschouw de 3-dimensionale affiene ruimte* $\mathbf{AG}(3,q)$ *over het eindig veld* $\mathbf{GF}(q)$. *Bepaal het aantal 3-tallen* (x, L, π) *met* x *een punt,* L *een rechte en* π *een vlak waarvoor* $x \in L \in \pi$.

(*b*) *Beschouw de 4-dimensionale projectieve ruimte* $\mathbf{PG}(4,q)$ *over het eindig veld* $\mathbf{GF}(q)$. *Onderstel dat* x *een punt is niet gelegen op de rechte* M. *Hoeveel 3-ruimten gaan door* M *die* x *niet bevatten? Hoeveel 3-ruimten door* M *bevatten* x *wel?*

Opgave 2 *Beschouw een bilineaire ruimte* (V, f), *met* $V = V(4, \mathbb{R})$. *In verband met de reflexieve bilineaire vorm* f *en de basis* $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ *van* V *wordt gegeven:* e_4 *is isotroop, de norm van* e_1 *en* e_2 *is* 1, *en* e_1 *is orthogonaal met* $\langle e_2, e_3 \rangle$. *Tevens is* e_3 *orthogonaal met* e_4 *en* $f(e_3, e_3) = 2$. *Verder geldt dat* $f(e_2, e_3) = 0$, $f(e_2, e_4) = 1$ *en dat de determinant van* $m_B f$ *gelijk is aan* $-2(1 + a^2)$ *met* a *een reële parameter.*

(*a*) *Bepaal* $m_B f$.

(*b*) *Bepaal de isotrope kegel van* (V, f). *Is de isotrope kegel een lineaire deelruimte van* V? *Verklaar je antwoord (in functie van* a*).*

Opgave 3 *Beschouw de affiene ruimte* $\mathbf{AG}(4, \mathbb{K})$ *over het veld* $\mathbb{K}$, *en een affien referentiesysteem* (o, e_1, e_2, e_3, e_4). *De affiene coördinaten van* p_1, p_2, p_3, p_4 *zijn, respectievelijk,*

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(*a*) *Bepaal het zwaartepunt van* $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$. *Bestaat dit altijd?*

(*b*) *Bepaal wanneer precies* p_1, p_2, p_3 *en* p_4 *affien onafhankelijk zijn.*

(*c*) *Bepaal de barycentrische coördinaten van* $\begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *ten opzichte van* (p_1, p_2, p_3, p_4).