Examen Wiskundige Optimalisatie

Academiejaar 2006-2007, maandag 18 juni 2007, 9u00

Theorie

- Schets de context van quasi-Newton methoden: in welke situatie worden ze aangewend, hoe verhouden ze zich tot de zuivere Newton-methode en tot de toegevoegde gradiëntenmethoden? Leg uit welke wiskundige benadering aan de basis van deze methoden ligt en hoe men tot de verschillende varianten komt (de algemene principes en formuleringen zonder bewijs weergeven!)

Oefeningen

1. Beschouw de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ functie
$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{5}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + 2x_1x_2 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 .$$
   (a) Breng f in de standaardvorm $f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\hat{Q}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x}$.
   (b) Voor welke waarden van α convergeert de gradiëntmethode met vaste staplengte α naar het minimum van f?
   (c) Bereken de minimizer $\boldsymbol{x}^*$ van f.
   (d) Wat is na 1 iteratiestap van de gradiëntmethode met lijnoptimalisatie en startend vanuit het beginpunt $\boldsymbol{x}^{(0)} = [0, \frac{1}{3}]^T$, de benadering $\boldsymbol{x}^{(1)}$ van de minimizer $\boldsymbol{x}^*$?

2. Los op met behulp van het simplexalgoritme
$$\min(-\frac{3}{4}x_1 + 20x_2 - \frac{1}{2}x_3)$$
onder de voorwaarden
$$\begin{cases} \frac{1}{4}x_1 - 8x_2 - x_3 \leq 0 \\ \frac{1}{2}x_1 - 12x_2 - \frac{1}{2}x_3 \leq 0 \\ x_3 \leq 1 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$
Opgelet, gebruik voor de bepaling van de opeenvolgende pivot-elementen de regel van Bland.

3. Bepaal $\max(x^2 - y)$ onder de voorwaarde dat $1 - x^2 - y^2 \geq 0$.

Examen Wiskundige Optimalisatie

Academiejaar 2006-2007, maandag 25 juni 2007, 9u00

Theorie

- Schets de context van quasi-Newton methoden: in welke situatie worden ze aangewend, hoe verhouden ze zich tot de zuivere Newton-methode en tot de toegevoegde gradiëntenmethoden? Leg uit welke wiskundige benadering aan de basis van deze methoden ligt en hoe men tot de verschillende varianten komt (de algemene principes en formuleringen zonder bewijs weergeven!)

Oefeningen

1. Gegeven is de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ functie

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^T \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} - 22\,.$$

   (a) Voor welke waarden van α convergeert de gradiëntmethode met vaste staplengte α naar het minimum van f?

   (b) Bereken de minimizer $\boldsymbol{x}^*$ van f.

   (d) Wat is na 1 iteratiestap van de gradiëntmethode met lijnoptimalisatie en startend vanuit het beginpunt $\boldsymbol{x}^{(0)} = [-2, 2]^T$, de benadering $\boldsymbol{x}^{(1)}$ van de minimizer $\boldsymbol{x}^*$?

2. Los op met behulp van het simplexalgoritme

$$\max(10x_1 + 12x_2 + 12x_3)\,,$$

   onder de voorwaarden

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 20\,, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 20\,, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 20\,, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0\,. \end{cases}$$

3. Bepaal

$$\max\left[\ln(1+x) + \ln(1+y)\right]\,,$$

   onder de voorwaarden

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1\,, \\ x \geq 0\,, \\ y \geq 0\,. \end{cases}$$