Examen Statistische Fysica : 2 februari 2007

THEORIE

Antwoord bondig en gevat !

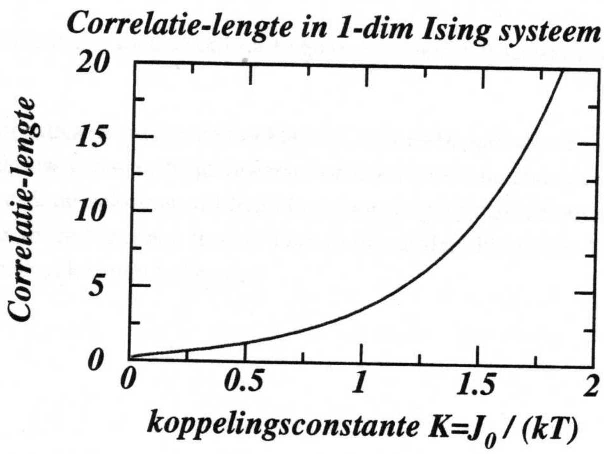
1. **VRAAG 1 (10 PUNTEN)**

   Beschouw een systeem van N magnetische dipolen $\vec{\mu}$ van spin $\frac{1}{2}$ deeltjes die in een extern magnetisch veld $\vec{\mathcal{B}}$ worden geplaatst. We veronderstellen dat de verschillende magnetische dipolen met elkaar interageren via een dichtste-nabuur interactie met sterkte J_0 (Ising systeem).

   - Leid de algemene partitiefunctie af voor dergelijk systeem.
   - De spin-spin correlatiefunctie $G(r)$ wordt gedefinieerd door

     $$G(r) \equiv \overline{\sigma_j^z \sigma_{j+r}^z} - \overline{\sigma_j^z}\,\overline{\sigma_{j+r}^z} \,.$$

     Beschrijf kort wel soort fysische informatie deze grootheid ons levert. Waarom is $G(r)$ geen functie van j ?
   - Stel een formule op (niet uitwerken !!!) die $G(r)$ bepaalt voor het meest algemeen Ising systeem ($\mathcal{B} \neq 0$ en $J_0 \neq 0$).



   - Toon aan dat in de afwezigheid van een extern magnetisch veld de correlatiefunctie $G(r)$ voor een ééndimensionaal Ising systeem de volgende vorm aanneemt

     $$G(r) = e^{-r/\xi} \,,$$

     met

     $$\xi = \frac{-1}{\ln\left[\tanh K\right]} \qquad \left(K \equiv \frac{J_0}{kT}\right) .$$

     Je kunt hierbij gebruik maken van de volgende uitdrukking voor de partitiefunctie van een ééndimensionaal Ising systeem

     $$Z(T, \mathcal{B} = 0, N) = 2^N \left[(\cosh K)^N + (\sinh K)^N\right] .$$

- Wat is de fysische betekenis van de grootheid ξ ?
- De hierboven berekende ξ kent het functionaal verloop zoals aangegeven in de figuur. Verklaar KWALITATIEF het verloop van ξ. Beschrijf kort wat ξ leert in verband met tweede-orde faseovergangen.

2. VRAAG 2 (20 PUNTEN)

   MONDELING EXAMEN

OEFENINGEN

BIJ HET OPLOSSEN VAN HET OEFENINGENGEDEELTE MOGEN ENKEL DE CURSUSNOTA'S GEBRUIKT WORDEN

OEFENING 1: HET IDEAAL BOSE GAS IN 2 DIMENSIES (10 PUNTEN)

Een ideaal gas van bosonen met spin $S = 4$ en massa m wordt gedwongen op een twee-dimensionaal oppervlakte A te bewegen.

1. Vind de distributiefunctie $f(\epsilon)d\epsilon$ die het aantal ééndeeltjestoestanden met een energie in het interval $[\epsilon, \epsilon + d\epsilon]$ geeft.

2. Toon aan dat de grootpotentiaal boven de kritische temperatuur de volgende vorm aanneemt

$$\Phi(T, V, \mu) = -\frac{9AkT}{\lambda^2} g_2(z) \, ,$$

met

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi mkT}}$$

en

$$g_\alpha(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^\alpha} \qquad z \equiv \exp \beta\mu \, .$$

3. Bepaal een algemene uitdrukking voor de gemiddelde energie $\overline{E}$ en de warmtecapaciteit bij constant oppervlak C_A.

4. Bepaal een criterium die toelaat om na te gaan wanneer het ideaal Bose gas zich in het klassiek regime bevindt.

5. Beschouw nu condities die vrij goed het klassiek regime benaderen. Bepaal de gemiddelde energie $\overline{E}$ van het ideaal Bose gas waarbij je de eerste-orde kwantummechanische correctie weerhoudt. Becommentarieer ook de bekomen uitdrukking voor de gemiddelde energie $\overline{E}$ van het tweedimensionaal Bose gas in de klassieke limiet. Had je die uitdrukking ook direct uit het veralgemeend equipartitietheorema kunnen bekomen?

OEFENING 2: MENGSEL VAN TWEE GASSEN (10 PUNTEN)

Beschouw een homogeen mengsel van twee onderscheidbare monoatomische gassen op een temperatuur T en in een volume V. Gas "A" bestaat uit N_A deeltjes. Gas "B" bestaat uit N_B deeltjes en bevindt zich in dezelfde container (met volume V) als gas "A". De moleculen interageren via de interacties $V_{AA}(|\vec{r}_{12}|)$ (interactie tussen twee "A" moleculen), en $V_{AB}(|\vec{r}_{12}|)$ (interactie tussen een "A" en een "B" molecule). De "B" moleculen interageren niet met elkaar. Het mengsel bevindt zich in het klassiek regime.

1. Beschouw de situatie waarbij de interacties tussen de moleculen kunnen verwaarloosd worden. Toon aan dat de partitiefunctie van het systeem van de volgende vorm is

$$Z(T,V,N_A,N_B) = Z(T,V,N_A) \times Z(T,V,N_B) .$$

Toon ook aan dat voor de druk P in de klassieke limiet geldt dat

$$P = P_A + P_B \qquad \text{Wet van Dalton} \quad ,$$

waarbij P_A (P_B) de partiële druk is van gas "A" (gas "B").

2. Bepaal een uitdrukking voor de partitiefunctie van het mengsel wanneer de interacties tussen de moleculen niet verwaarloosd kunnen worden.

3. Toon aan dat in de laagste orde van de dichtheid de toestandsvergelijking van het gas gegeven wordt door een uitdrukking van het type:

$$P = \frac{(N_A + N_B)\,kT}{V}\left[1 + \frac{N_A + N_B}{V} B_2(T)\right] .$$

4. Toon aan dat de viriaalcoëfficiënt $B_2(T)$ die in deze uitdrukking voorkomt de volgende vorm heeft:

$$B_2(T) = \left(\frac{N_A}{N_A + N_B}\right)^2 B_{AA}(T) + 2\left(\frac{N_A N_B}{(N_A + N_B)^2}\right) B_{AB}(T) .$$

5. Veronderstel dat de moleculen "A" ("B") een straal r_A (r_B) hebben. Bereken $B_{AB}(T)$ binnen de context van het zogenaamde harde-bollen-model: voor de moleculen van het type "A" vertaalt zich dit in een interactie van het type

$$\begin{aligned} V_{AA}(|\vec{r}_{12}|) &= +\infty \qquad 0 \le r_{12} \le 2r_A \\ &= 0 \qquad 2r_A \le r_{12} . \end{aligned}$$