Wetenschappelijk Rekenen

Examen - Derde bachelor informatica

Oefeningen – 31 mei 2007

Naam : .... GIT : ja – nee

1. Schrijf een program dat een benadering berekent voor de tweede orde afgeleide van een functie, gebruik makend van de formule

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2\,f(x) + f(x-h)}{h^2} - \frac{h^2}{12} f^{(iv)}(\eta)$$

waarbij $\eta \in]x-h,\, x+h[$. Test je programma op de functie $f(x) = x^4$ in $x = 1$.

   (i) Plot (en maak hiervan op je examenblad een schets), in een dubbel-logaritmische schaal, de norm van de fout als functie van h voor $h = 10^{-k}$, $k = 0, 1 \ldots, 16$. Voor welke waarde van h wordt de norm van de fout geminimaliseerd ? Kun je dit verklaren ?

   (ii) Stel dat je het rechterlid van de formule

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2\,f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

   eerst uitwerkt. Maak de plot uit punt (i) nu opnieuw. Wat is nu de ideale waarde van h ?

2. Maak gebruik van Richardson-extrapolatie om, vertrekkend van de formule

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2\,f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

die toegepast wordt met $h = 0.1$, $h = 0.05$ en $h = 0.025$, een benadering met een $\mathcal{O}(h^6)$ fout te construeren voor $f(x) = x^8$ in $x = 1$.

3. Bewijs dat de eigenwaarden van een unitaire matrix steeds modulus 1 hebben.

4. Beschouw de Runge-Kutta methode

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4}\,(k_1 + 3\,k_3)$$

met

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f\left(x_n + \frac{1}{3}h, y_n + h\,\frac{1}{3}k_1\right) \\ k_3 &= f\left(x_n + \frac{2}{3}h, y_n + h\,\frac{2}{3}k_2\right) . \end{aligned}$$

Pas deze methode toe op de vergelijking $y' = \lambda\, y$, $y(0) = 1$.

   (i) Er geldt $y_{n+1} = R(\lambda\, h)\, y_n$. Bepaal $R(z)$.

   (ii) Stel dat $\lambda = -5$. Voor welke positieve waarden van h zal $y_n \to 0$ als $n \to \infty$?