27.VIII.07 – Wiskundige Analyse III, theorie (= 70% van de punten)

(De bewijzen hoeven niet langer of explicieter te zijn dan in de cursus, en alles wat er in de cursus aan voorafgaat mag zonder meer gebruikt worden.)

Vraag 1.

1. Zeg (zonder bewijs) onder welke voorwaarden geldt dat $h^*_{n,\alpha}(X_1 \cup X_2) = \cdots + \ldots$
2. Bewijs daarmee dat elke gesloten verzameling α-Hausdorffmeetbaar is voor elke $\alpha > 0$. Maak ook de bijhorende figuur.

Vraag 2.

1. Formuleer en bewijs de stelling die als bijzondere gevallen heeft: *(i) 'in maat'* $\Longrightarrow$ *'deelrij bijna gelijkmatig'*, en *(ii) stelling van Egorov ('b.o. in eindige maatruimte'* $\Longrightarrow$ *'bijna gelijkmatig')*.
2. Bewijs het eerste bijzondere geval (i).
3. Bewijs het tweede bijzondere geval (ii), dus de stelling van Egorov.

Vraag 3.

1. Formuleer (zonder bewijs) de *stelling van Tonelli*
2. Vul aan (geen bewijs): *Voor de lineaire transformatie* $T(x, y) = (\alpha x, \beta y)$ *(*$\alpha \neq 0$ *en* $\beta \neq 0$*) hebben we: is* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *..., dan is... en* $\int_{\mathbb{R}^2} f \cdots = \ldots$
3. Bereken de Lebesguemaat van de n-dimensionale bal met straal R.

Vraag 4. Beantwoord met 'ja' of 'neen' (NIETS UITLEGGEN, TOEVOEGEN OF BEWIJZEN):

1. Het kwadraat van een meetbare functie is meetbaar
2. Het kwadraat van een integreerbare functie is integreerbaar
3. Een beperking van een meetbare functie is meetbaar
4. Elke begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ heeft een Lebesguemaat
5. Elke eindige deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ heeft een Lebesguemaat
6. Elke meetbare $f : X \to [0, +\infty]$ is integreerbaar
7. Een integreerbare functie met oneindige waarden heeft een oneindige integraal
8. Als een rij meetbare functies b.o. convergeert naar f, dan is f meetbaar.

EINDE THEORIE

Wie zijn theorie afgegeven heeft (dat moet ten laatste om 11.30 gebeuren) krijgt de opgave voor een oefening. Bij het oplossen daarvan mag men de syllabus en de in de loop van het semester behandelde oefeningen vrij consulteren. De oefening moet ten laatste om 12.30 afgegeven worden.