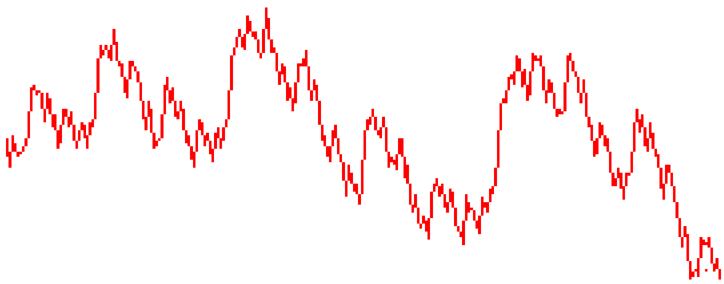
Wiskundige Analyse

Christian Impens & Beukje Temmermans

Bert Seghers
1ste bachelor in de wiskunde
Universiteit Gent



Ten geleide

Beste lezer van deze samenvatting,

Wat u op dit moment leest is een samenvatting van de cursus Wiskundige Analyse I van de faculteit Wetenschappen van de Universiteit Gent, academiejaar 2006-2007, gegeven door prof. dr. Christian Impens in eerste bachelor wiskunde en fysica. Ik heb gepoogd om, als hulp voor studenten wiskunde en fysica, de cursus van 193 pagina's verkort en toch vlot weer te geven.

Dit LaTeX-document is dus bedoeld om antwoord te geven op de vraag wat er in de cursus staat, als de overvloed aan bewijzen die 70% van de ruimte in de cursus innemen je de bomen door het bos niet meer doet zien. Daarom koos ik voor de weglating van bewijzen, maar het behoud van de stellingen. Verder heb ik geopteerd om geen referenties te gebruiken omdat het de leessnelheid sterk reduceert als een samenvatting zinnen bevat zoals *„Door stelling 12.4.3.1 herleidt (12.35) zich tot (12.36)"*. Niet alles van bemerkingen en beperkingen is opgenomen; vaak zijn bijvoegsels zoals „*over het interval U*" weggelaten. Het is niet de bedoeling om volledig te zijn, eerder om een samenvattend beeld te geven. Daarom is ook niet alles uitgelegd, bijvoorbeeld dat $\imath$ de identieke afbeelding $x \mapsto x$ voorstelt. Voor grondigere definities, onuitgelegde begrippen, bewijzen en nog veel meer wat niet opgenomen is in deze samenvatting verwijs ik graag naar de cursus van prof. Christian Impens.

Alvast veel succes met de examens!

Met vriendelijke groet,
Bert Seghers

Inhoudsopgave

Inleiding

Notaties en definities

$\subset$ is strikte inclusie, samenvallen onmogelijk.
Definitieverzameling = domein = D_f
Waardenverzameling $\neq$ B in $A \to B$-afbeelding, wel $\subset$
Restricties, aftelbaarheid, reële, complexe, rationale, nietnegatieve functies.

Logica

Implicatie, contrapositie, nodig en voldoende, ondersteIde, gestelde, bewijs, volledige inductie

1 Drie getallenvelden

1.1 Rationaal en reëel

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ en zelfs $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leqslant)$ is een totaal geordend veld
Maar met gaten! $\Rightarrow$
Stelling: er bestaat geen rationaal getal met kwadraat 2 (+Bewijs)
Bovengrens, ondergrens, begrensd, grootste element of maximum, minimum, supremum, infimum
*Stelling (**Dedekind**): $\mathbb{R}$ bestaat, heeft alle eigenschappen en vertoont geen gaten, mits supremumprincipe: elke naar boven begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}$ heeft een supremum.*
Stelling: twee verzamelingen met elementen $x < y \Rightarrow \exists \xi : x \leqslant \xi \leqslant y$ (+Bewijs)
Stelling: Tussen twee reële getallen liggen oneindig veel rationale en oneindig veel irrationale. (+Bewijs)
Stelling: $\omega = \sup X \Leftrightarrow \forall x : x \leqslant \omega \wedge \forall \varepsilon > 0 : \exists x$ met $\omega - \varepsilon < x$. (+Bewijs)

- *Stelling:* $\forall x : \exists y : x \leqslant y \Rightarrow \sup X \leqslant \sup Y$. (+Bewijs)
- *Stelling:* $X \subseteq Y \Rightarrow \sup X \leqslant \sup Y$ (+Bewijs)
- *Stelling:* $\sup(X + Y) = \sup X + \sup Y$ (+Bewijs)
- *Stelling:* $\sup(cX) \begin{cases} = c \sup X & (c > 0) \\ = c \inf X & (c < 0) \end{cases}$ (+Bewijs)
- *Stelling:* $\sup(XY) = \sup X \sup Y$ *voor X en Y bestaande uit nietnegatieve getallen* (+Bewijs)

Stellingen: $\begin{aligned} \sup(f+g) &\leqslant \sup f + \sup g \\ \inf(f+g) &\geqslant \inf f + \inf g \\ \sup(fg) &\leqslant \sup f \sup g \\ \inf(fg) &\geqslant \inf f \inf g \end{aligned}$ (+Bewijzen)

Stelling: $|f(x) - f(x')| < C \ \forall a \leqslant x, x' \leqslant b \Rightarrow \sup_{[a,b]} f - \inf_{[a,b]} f \leqslant C$ (+Bewijs)

Negen soorten intervallen, drie soorten grenzen $([,],\infty)$
Stelling: V is een interval $\Leftrightarrow$ *Elk punt tussen twee punten van V behoort tot V.* (+Bewijs)

1.2 Het complex getallenveld

Complex getal = koppel reële getallen (x, y) met x reëel deel en y imaginair deel. Imaginaire getallen gelijk als delen gelijk.
Imaginaire eenheid, $i^2 = -1$, inversie, complex toegevoegde.
Stelling: Het veld $\mathbb{C}$ *kan onmogelijk geordend worden.* (+Bewijs)

2 Reële rijen

2.1 Elementaire theorie

Reële rij $(x_n) = x_1, x_2, \ldots$
DEF convergentie van (x_n) naar a

$$x_n \to a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geqslant N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon)$$

DEF divergentie van (x_n) naar $+\infty$

$$x_n \to +\infty \Leftrightarrow (\forall M \in \mathbb{R})(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geqslant N \Rightarrow x_n > M)$$

Stelling: De limiet van een convergente rij is uniek. (+Bewijs)
Stelling: Elke convergente rij is begrensd. (+Bewijs)
*Stelling (**Insluitstelling**): Als* $x_n \leqslant y_n \leqslant X_n$ *en* $x_n \to a$ *en* $X_n \to a$*, dan ook* $y_n \to a$ (+Bewijs)
Stelling: Limiet van een som is som van de limieten voor rijen. (+Bewijs)
Stelling: $x_n \to 0 \wedge y_n$ *begrensd* $\Rightarrow x_n y_n \to 0$ (+Bewijs)
Stelling: $x_n \to a \wedge y_n \to b \Rightarrow x_n y_n \to ab$ *(Limiet product = product limieten)* (+Bewijs)
Stelling: Absolute waarde limiet is limiet absolute waarde (+Bewijs)
Stelling: $x_n \to a \neq 0 \Rightarrow x_n \neq 0$ *vanaf een zeker rangnummer en* $\frac{1}{x_n} \to \frac{1}{a}$ (+Bewijs)
Stelling: $x_n \geqslant 0 \forall n, x_n \to a$*, dan* $a \geqslant 0$ (+Bewijs)
Stelling: Als alle termen van een convergente rij in $[a, b]$ *liggen, ligt ook de limiet daarin.* (+Bewijs)

2.2 Stelling van Bolzano-Weierstrass

Stelling: x_n *stijgend en naar boven begrensd* $\Rightarrow$ *convergent met* $\lim x_n = \sup x_n$ (+Bewijs)
Stelling: Elke deelrij van een convergente rij is zelf convergent naar dezelfde limiet als de oorspronkelijke. (+Bewijs)
Stelling: Elke rij heeft een monotone deelrij! (+Bewijs)

*Stelling (**Stelling van Bolzano-Weierstrass**): Als alle rijtermen in* $[a, b]$ *liggen, dan bestaat er een deelrij die convergeert naar een punt uit* $[a, b]$. (+Bewijs)
*Stelling (**Kenmerk van Cauchy**):* x_n *convergeert* $\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N})(|x_n - x_m| < \varepsilon$ *als* $n > N_\varepsilon, m > N_\varepsilon)$ (+Bewijs)
*Stelling (**Stelling van de vernestelde compacte intervallen**): Is dit een rij van compacte interval met de eigenschap:* $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq [a_3, b_3] \supseteq \ldots$, *dan is* $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$ *niet ledig, m.a.w. er bestaat een reële* ξ *die tot alle intervallen behoort. Als bovendien* $\lim(b_n - a_n) = 0$, *dan is die* ξ *uniek en gelijk aan* $\lim a_n = \lim b_n$. (+Bewijs)
*Stelling (**Cantor**): Een compact interval is niet aftelbaar, en bijgevolg ook* $\mathbb{R}$ *niet*(Geen bewijs)

3 Limieten van functies

Omgeving, basisomgeving, open bal, ophopingspunt.
DEF L is de **limiet** van $f(x)$ voor $x \to a$

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D)(0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

*Stelling **(Rijenkenmerk voor limieten)**:*(+Bewijs)

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \text{rij } x_n \to a : \text{ rij } f(x_n) \to f(a)$$

Stelling: Limiet bestaat $\Rightarrow$ *linkerlimiet en rechterlimiet bestaan en zijn gelijk (en omgekeerd)* (+Bewijs)
*Stelling **(Eigenschap van limiet):*** L *bestaat* $\Rightarrow \exists$ *doorprikte omgeving:* $f(x)$ *begrensd* (+Bewijs)
*Stelling **(Eigenschap van positieve limiet):*** $L > 0 \Rightarrow \exists$ *doorprikte omgeving:* $f(x) > 0$ (+Bewijs)
DEF $f(x)$ **divergeert** naar $+\infty$ voor $x \to a \Leftrightarrow$
$(\forall M \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in D)(0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > M)$
Toepassing: $\lim_{+\infty} x^n = +\infty$ en alle veeltermfuncties ook naar $\pm\infty$.

4 Continuïteit

4.1 Continuïteit in een vast punt

DEF $f(x)$ **continu** in a$\Leftrightarrow$
$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D)(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$
Alle soorten stellingen van limieten uitgebreid naar continuïteit met $f(a) = L$
Stellingen: bewerkingen op continue functies = continu; veeltermfuncties altijd continu, samenstelling van zo'n functies continu, behoud van teken (+Bewijsjes)

4.2 Continuïteit over een verzameling

DEF $f(x)$ continu over verzameling $A \Leftrightarrow f/A$ continu $\Leftrightarrow$
$(\forall x \in A)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall t \in A)(|t-x| < \delta \Rightarrow |f(t)-f(x)| < \varepsilon)$
Stelling: De volgende uitdrukkingen van continuïteit zijn equivalent (+Bewijs)

$$(\forall x \in]a,b[)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in]a,b[)(|t-x| < \delta \Rightarrow |f(t)-f(x)| < \varepsilon)$$

$$(\forall x \in]a,b[)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D_f)(|t-x| < \delta \Rightarrow |f(t)-f(x)| < \varepsilon)$$

Stelling: f continu over $[a,b] \Leftrightarrow$ continu over $]a,b[$, rechtscontinu in a en linkscontinu in b (+Bewijs)
*Stelling (**Speciaal geval van tussenwaardestelling, voor 0**):* (+Bewijs)

$$a < b, f(a)f(b) < 0, f \text{ continu over } [a,b] \Rightarrow \exists c \in]a,b[: f(c) = 0$$

*Stelling (**Tussenwaardestelling van Bolzano**): f continu over interval I. Elk getal tussen twee functiewaarden is zelf functiewaarde van getal in f/I.* (+Bewijs)
Definities van (strikt) stijgend,... en inverse functies
Stelling van inversie van continue strikt monotone functies:
Functie strikt $\frac{\textit{stijgend}}{\textit{dalend}}$ en continu over interval $I \Rightarrow$ Er bestaat een inverse strikt $\frac{\textit{stijgend}}{\textit{dalend}}$ en continu over $f(I)$. (+Bewijs)
*Stelling (**Extremumstelling van Weierstrass**): $f/[a,b]$ continu over dit compact interval $\Rightarrow$ f/[a,b] bereikt minimum en maximum m.a.w. $\exists x_1, x_2 \in [a,b] : \forall x \in [a,b] : f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2)$* (+Bewijs)
continuïteit vs. gelijkmatige continuïteit:

$$(\forall x \in A)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_{x,\varepsilon} > 0)(\forall x' \in A)(|x-x'| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(x')| < \varepsilon)$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_{\varepsilon} > 0)(\forall x \in A)(\forall x' \in A)(|x-x'| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(x')| < \varepsilon)$$

Stelling van Heine: f continu over compact interval $\Rightarrow$ automatisch gelijkmatig continu (+Bewijs)

5 Afleidbaarheid

5.1 Afgeleiden van de eerste orde

f afleidbaar $\Leftrightarrow \exists \alpha, r: \quad f(a+h) = f(a) + \alpha h + hr(h)$ met $r(h) \to 0$ als $h \to 0$
Stelling: afleidbaar in $a \Rightarrow$ continu in a. (+Bewijs)
Stelling, eigenschap van positieve afgeleide: $f'(a) > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall a < x < a+\delta : f(x) > f(a)$ en $a - \delta < x < a : f(x) < f(a)$ (+Bewijs)

Rekenregels: (+Bewijs)

$$\begin{aligned} (f \pm g)'(a) &= f'(a) \pm g'(a) \\ (fg)'(a) &= f'(a)g(a) + f(a)g'(a) \\ \frac{f}{g}(a) &= \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)} \end{aligned}$$

Stelling, kettingregel: f aflb in a, g in $f(a), F = g(f(x)) \Rightarrow F'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ (+Bewijs)
Stelling voor het afleiden van de inverse (+Bewijs)

$$\varphi'(f(c)) = \frac{1}{f'(c)}$$

Stelling, nodige voorwaarde voor extremum van Fermat: lokaal extremum + aflb in $a \Rightarrow f'(a) = 0$ (+Bewijs)
*Stelling (**Middelwaardestelling**): $\exists c \in]a, b[: f(b-) - f(a+) = (b-a)f'(c)$* (+Bewijs: Rolle + Lagrange)
Stellingen over (strikt) stijgen/dalen en teken afg. (+Bewijs adhv middelwaardestelling)
*Stelling (**Veralgemeende middelwaardestelling**):* (+Bewijs)

$$\frac{f(b-) - f(a+)}{g(b-) - (a+)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Stelling, De l'Hôpital (+Bewijs)

$$\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

Toepassing: zelfde stelling, maar met f en $g \to +\infty$ als $x \to +\infty$ (+Bewijs)

5.2 Afgeleiden van hogere orde

over klassen C^1, C^n, C^∞

6 Integratie

6.1 Onderintegraal, bovenintegraal, integraal

Partitie π: genummerde eindige deelverzameling van interval.

Bovensom	$S_\pi(f)$	$= \sum_{k=1}^{m} \sup_{I_k} f \ell_k$
Ondersom	$s_\pi(f)$	$= \sum_{k=1}^{m} \inf_{I_k} f \ell_k$
Bovenintegraal	$\overline{\int_a^b} f$	$\inf S_\pi$
Bovenintegraal	$\underline{\int_a^b} f$	$\sup s_\pi$

Stelling: Voegt men partitiepunten toe, wordt de bovensom niet groter en de ondersom niet kleiner (+Bewijs)
Stelling: Willekeurige ondersom $\leqslant$ willekeurige bovensom (+Bewijs)

DEF $\underline{\int} = \overline{\int} \Rightarrow$ integreerbaar, $\int$ is gemene waarde.
Stelling: Integreren is een lineaire operatie: (+Bewijs)

$$\int_a^b cf = c\int_a^b f, \quad \int_a^b f+g = \int_a^b f + \int_a^b g$$

Stelling van positiviteit van de integraal: (+Bewijs)

$$\forall a < x < b \quad f(x) \geqslant 0 \Rightarrow \int_a^b f \geqslant 0$$

Stelling van monotoniteit van de integraal: (+Bewijs)

$$\forall a < x < b \quad f(x) \leqslant g(x) \Rightarrow \int_a^b f \leqslant \int_a^b g$$

Stelling van additiviteit van de integraal: $\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$ (+Bewijs, eerst hulpstelling van boven- en onderintegraal)
Stelling: Integreerbaar over interval $I \Rightarrow$ ook over deelinterval J (+Bewijs)
Stelling: $f(x) \geqslant 0$ over $I/J \Rightarrow \int_J f \leqslant \int_I f$ (+Bewijs)
Stelling: f integreerbaar, maar gewijzigd in een eindig aantal punten blijft integreerbaar en $\int$ verandert niet (+Bewijs)

6.2 Het kenmerk van Darboux

Stelling van Darboux: Integreerbaar $\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\pi, S_\pi - s_\pi < \varepsilon$ (+Bewijs)
Stelling: continu over $]a, b[$ met eenzijdige limieten in de uiteinden of continu over $[a, b] \Rightarrow$ integreerbaar (+Bewijs)
DEF f^-, f^+
Stelling: $f^-, f^+, |f|$ integreerbaar als f integreerbaar en: (+Bewijs)

$$\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$$

Stelling: f en g integreerbaar $\Rightarrow$ ook fg (+Bewijs)

6.3 Integraal met veranderlijke bovengrens - eerste hoofdstelling

*Stelling (**Continuïteit van een integraal met veranderlijke bovengrens**): f integrb over $]a, b[\Rightarrow F(x) := \int_{x_0}^x f$ continu over $]a, b[$.*
*Stelling (**Eerste hoofdstelling**): $D_\pm F(t) = f(t\pm)$ dus $F'(t) = \lim\limits_{u\to t} f(u)$* (+Bewijs)
DEF Primitieve F van f: $F' = f$, notatie $F = \int f$

6.4 Tweede hoofdstelling

*Stelling (**Tweede hoofdstelling, integratie van een afgeleide**):* (+Bewijs)

$$\int_a^b f' = [f]_a^b := f(b-) - f(a+) \quad \text{of} \quad \int_a^b f = \left[\int f\right]_a^b$$

6.5 partiële integratie en substitutie

$\hookrightarrow$ Bewijzen vragen veel voorwaarden!
Stelling: $\int_a^b fg' = [fg]_a^b - \int_a^b gf'$ (+Bewijs)
*Stelling (**grens-naar-grens-transformatie**):* (+Moeilijk bewijs)

$$\int_a^b f(\theta x)\theta' x \; dx = \int_{\theta(a)}^{\theta(b)} f(y) \; dy$$

Stelling: $\int_a^b f(x)dx = \int_{-b}^{-a} f(-y)dy$
Stelling: f integreerbaar over $]a,b[$ (periode $b-a$) $\Rightarrow$ overal integreerbaar, $\int_a^b f = \int$ over lengte periode (+Bewijs)

7 Elementaire functies en praktische integratietechnieken

Voor integratie heeft men genoeg aan veeltermen, $\int \frac{1}{x}$ en $\int \frac{1}{1+x^2}$.

7.1 De hyperbolische familie

7.1.1 De logaritme

$$\textbf{DEF} \qquad \ln x := \int_1^x \frac{dt}{t} \quad \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$

Stelling: $\ln x = 1 \Rightarrow x = 2,6 < \mathbf{e} < 2,8$ (+Bewijs)
Stelling: $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ (+Bewijs)
Stelling: $1 - \frac{1}{x} \leqslant \ln x \leqslant x - 1$ (+Bewijs)

7.1.2 De exponentiële

$$\textbf{DEF} \qquad \exp x := \ln^{-1} \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$

Stelling: Onbepaald afleidbaar en $\exp' = \exp$ (+Bewijs)
Stelling: $\exp x \exp y = \exp(x+y)$ (+Bewijs)
Stelling: $1 + x \leqslant \exp x \leqslant \frac{1}{1-x}$ (+Bewijs)
Stelling: $\lim_\infty \frac{\textit{veelterm}}{\exp} = 0$ (+Bewijs)

7.1.3 De machtfuncties

$$\textbf{DEF} \qquad x^y := e^{y \ln x} \qquad 0^a := 0$$

Stelling: $a^{x\prime} = a^x \ln a \qquad x^{a\prime} = a x^{a-1}$ (+Bewijs)

$$\textbf{DEF} \qquad \sqrt[n]{a} := \begin{cases} a^{\frac{1}{n}} & \text{als } a > 0, n \in \mathbb{N}^* \\ -(-a)^{\frac{1}{n}} & \text{als } a < 0, n \in 2\mathbb{N}^* \end{cases}$$

Stelling van Euler: $\lim_{t \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{t}\right)^t = e^x$ (+Bewijs)

7.1.4 De hyperbolische functies

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \tanh x := \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} - 1}$$

Stelling: $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$ (+Bewijs)
Stelling: $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$ (+Bewijs)
Stelling: $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$ (+Bewijs)

$$\sinh' x = \cosh \qquad \cosh' x = \sinh \qquad \tanh' x = \frac{1}{\cosh^2}$$

7.1.5 De inverse hyperbolische functies

$$\begin{aligned} \arg\sinh x &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) &= \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \\ \arg\cosh x &= \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) &= \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \\ \arg\tanh x &= \ln \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}} &= \int \frac{1}{1 - x^2} \end{aligned}$$

7.2 De goniometrische familie

7.2.1 De arcustangens

$$\textbf{DEF} \qquad \arctan x := \int_0^x \frac{dt}{1 + t^2} \qquad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Stelling: $\frac{x}{1+x^2} \leqslant \arctan x \leqslant x$ (+Bewijs)
Stelling: $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & x > 0 \end{cases}$ (+Bewijs)
Stelling: arctan *strikt* $\nearrow$ *met asymptoten:* $\begin{matrix} -\infty & -\frac{\pi}{2} \\ +\infty & \frac{\pi}{2} \end{matrix}$ (+Bewijs)

7.2.2 De tangens

$$\textbf{DEF} \qquad \tan x := \arctan^{-1} \quad \forall\, x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$\textbf{DEF} \qquad \tan(x + k\pi) := \tan x \quad \mathbb{R} \setminus (2\,\mathbb{Z}+1)\frac{\pi}{2} \to \mathbb{R}$$

Stelling: $\tan x = \dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}$ (+Bewijs)
Stelling: $\tan' x = 1 + \tan^2 x$ (+Bewijs)

7.2.3 De sinus en cosinus

$$\textbf{DEF} \quad \sin x := \begin{cases} \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} \\ 0 \end{cases} \qquad \cos x := \begin{cases} \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} & \forall x \in \mathbb{R}\setminus(2\,\mathbb{Z}+1)\frac{\pi}{2} \\ -1 & \forall x \in (2\,\mathbb{Z}+1)\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Allemaal basiseigenschappen van sinus en cosinus kunnen bewijzen adhv $\uparrow$.
Stelling: $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ (+Bewijs)
Stelling: $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ (+Bewijs)
Stelling: $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$ (+Bewijs)
Stelling: $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$ (+Bewijs)
*Stelling, formule van **de Moivre**:* $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$ (+Bewijs)
Stelling, ongelijkheid van Jordan: $\frac{2x}{\pi} < \sin x < x \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$ (+Bewijs)
Stelling: $\begin{cases} \cos\theta &= \alpha \\ \sin\theta &= \beta \end{cases}$ met $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ heeft juist 1 oplossing in elk halfopen interval met lengte 2π. (+Bewijs)
Toepassing: poolcoördinaten
Modulus van $x + iy = z \in \mathbb{C} \quad = \sqrt{x^2+y^2}$. Vandaar ook goniometrische voorstelling van $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$.
Complexe wortels uit $\zeta^n = z_0 = |z_0|(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0)$:

$$\begin{aligned}
\zeta_0 &= \sqrt[n]{|z_0|}\left(\cos\frac{\theta_0}{n} + i\sin\frac{\theta_0}{n}\right) \\
\zeta_1 &= \sqrt[n]{|z_0|}\left(\cos\frac{\theta_0+2\pi}{n} + i\sin\frac{\theta_0+2\pi}{n}\right) \\
\zeta_2 &= \sqrt[n]{|z_0|}\left(\cos\frac{\theta_0+4\pi}{n} + i\sin\frac{\theta_0+4\pi}{n}\right) \\
&\vdots \\
\zeta_{n-1} &= \sqrt[n]{|z_0|}\left(\cos\frac{\theta_0+2\,(n-1)\,\pi}{n} + i\sin\frac{\theta_0+2\,(n-1)\,\pi}{n}\right)
\end{aligned}$$

(+Bewijs van uniciteit)

7.2.4 De overige cyclometrische functies

$$\arcsin := \sin\big|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}^{-1} \qquad [-1,1] \to [-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}] \qquad \arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arccos := \cos\big|_{[0,\pi]}^{-1} \qquad [-1,1] \to [0,\pi] \qquad \arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arcsin x + \arccos x = \tfrac{\pi}{2}$$

7.3 Formules van Stirling en Wallis

Veelvoorkomende integralen, nodig voor de stelling van Wallis: (+Bewijs)

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} &= \frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1}\frac{2n-2}{2n-1}\cdots\frac{4}{5}\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Stelling van Wallis: (+Bewijs)

$$\frac{1}{\sqrt{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}} < \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdots\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$$

Stelling van Stirling: De rij $\dfrac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$ *is strikt dalend en convergent naar* $\sqrt{2\pi}$*.*
Voor grote waarden is dan ook $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$. (+Bewijs)

7.4 Praktische integratietechnieken

Men kan integreren mits kennis van bekende integraaltypes, partiële integratie, substitutie en splitsen in partieelbreuken.

Bekende belangrijke onbepaalde integralen

- De meeste verondersteld gekend
- Bij $|x|$: correct afleiden, vermenigdvuldigen met het teken $\left(=\frac{|x|}{x}\right)$.
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\tan x}$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x} = -\operatorname{arg}\tanh(\cos x) = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x} = \operatorname{arg}\tanh(\sin x) = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$

afg	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
__	$\cos x$	$-\sin x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$
__h	$\cosh x$	$\sinh x$	$\dfrac{1}{\cosh^2 x}$
arc__	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\dfrac{1}{x^2+1}$
arg __h	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\dfrac{1}{1-x^2}$

Alles is op te lossen

Stelling: Alle integralen van rationale functies kunnen uitgedrukt worden d.m.v. rationale, ln *en* arctan*.* (+Bewijs: deling, splitsen in partieelbreuken)
Stelling: De volgende functies kunnen door substituties herleid worden tot rationale integranda: (+Bewijs)

$$\begin{array}{ll} R(x, \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx & R(e^{ax})dx \\ R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx & R(\sin x, \cos x)dx \end{array}$$

Exponentiële · veelterm

Stelling: Het gedrag van $\int$ exp $\cdot$*veelterm van* n*-de graad is te voorspellen, namelijk* (+Bewijs)

$$\int e^{\mu x} P(x)dx = e^{\mu x}\left(\frac{c_n}{\mu}x^n + \text{termen van lagere graad}\right)$$

Eerstegraadsdifferentiaalvergelijkingen met gescheiden veranderlijken

$$g(y_{(x)}) \cdot y'_{(x)} = f_{(x)}$$

Gemakkelijk op te lossen door $y'(x) = \frac{dy}{dx}$, waaruit $g(y)dy = f(x)dx$ of zelfs $\int g(y)dy = \int f(x)dx + C$. Eventuele beginwaarden invullen om C te bepalen.

8 Complexe reeksen

8.1 Twee aanvullingen over rijen

8.1.1 Boven- en onderlimiet

Vanaf nu 2 getallen i.p.v. 1 associëren met begrensde rij, waarvoor $L_1 - \varepsilon < x_n < L_2 + \varepsilon$.
Constructie: Dalende rij van suprema: $\sup\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$
$\sup\{x_2, x_3, \ldots\}$
$\sup\{x_3, \ldots\}$

$$\begin{aligned} \overline{\lim_{n\to+\infty}} &:= \lim_{n\to+\infty} \sup_{k\geqslant n} x_k = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geqslant n} x_k \\ \underline{\lim_{n\to+\infty}} &:= \lim_{n\to+\infty} \inf_{k\geqslant n} x_k = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geqslant n} x_k \end{aligned}$$

*Stelling (**Hoofdeigenschap**):* (+Bewijs)

$$\forall\varepsilon \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n > N:\ x_n < \overline{\lim}_{n\to+\infty} + \varepsilon$$

Stelling: een rij is conv $(\lim L) \Leftrightarrow \overline{\lim} = \underline{\lim} = L$. (+Bewijs)
Rekenregeltjes voor $\overline{\lim}$ *en* $\underline{\lim}$ (+Bewijs)

8.1.2 Convergentie van complexe rijen

De theorie voor reële rijen kan uitgebreid worden naar complexe, alleen voor het kenmerk van Cauchy is nodig:
Stelling van de convergente complexe deelrij: elke rij uit $\bar{B}(0, R)$ *heeft een convergente deelrij* $\to z_0 \in \bar{B}(0, R)$ (+Bewijs)
Driehoeksongelijkheid voor complexe getallen: $||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 \pm z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$

8.2 Convergentie van complexe reeksen

Definitie en onderscheid tussen rij, reeks, reekssom.
Stelling: Een reële reeks $\sum x_n,\ x_n \geqslant 0$ $\begin{array}{ccc} \text{conv} & \Leftrightarrow & s_n \leqslant M \\ \text{div} & \Leftrightarrow & s_n \geqslant M \end{array}$ (+Bewijs)
Stelling: $\sum z_n$ *conv* $\Rightarrow z_n \to 0$ (+Bewijs)

De complexe meetkundige reeks

- $\sum\limits_{n\geqslant 0} \rho^n$
- conv $\Leftrightarrow |\rho| < 1$ (+ Bewijs)
- $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \rho^n = \dfrac{1}{1-\rho}$ (+ Bewijs)
- $1 + \rho + \rho^2 + \ldots + \rho^{n-1} = \dfrac{1-\rho^n}{1-\rho}$

*Stelling (**Grote convergentieregel van Cauchy**):* (+Bewijs)

$$\sum z_n \text{ conv } \Leftrightarrow |z_{n+1} + z_{n+2} + \ldots + z_{n+p}| < \varepsilon \text{ als } n > N \text{ en } p \in \mathbb{N}$$

Absolute convergentie: als $\sum |z_n|$ ook conv is.
Stelling: Haken plaatsen is OK, weglaten of verplaatsen niet (+Bewijs)
Omschikking: termen van plaatsen veranderen, elke term a_n juist $1\times$ in reeks $\sum b_n$.
Stelling: Omschikking heeft geen invloed op convergentie en reekssom van absoluut convergente reeksen. (+Bewijs)

8.3 Convergentieregels voor reële reeksen zonder negatieve termen

8.3.1 Drie convergentieregels door vergelijking

Majoratie: $\sum x_n$ wordt gemajoreerd door $\sum x'_n$, of $\sum x_n \ll \sum x'_n$ als $x_n \leqslant K \cdot x'_n$ vanaf een zeker rangnummer.
*Stelling (**Majorantenregel**):* (+Bewijs)

$$\sum x_n \ll \sum x'_n, \; \sum x'_n \text{ conv } \Rightarrow \sum x_n \text{ conv.}$$

*Stelling (**Quotiëntregel**):* (+Bewijs)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = A \in \mathbb{R} \quad \begin{array}{ll} < 0 & \sum x_n \text{ conv } \Leftrightarrow \sum y_n \text{ conv} \\ = 0 & \sum y_n \text{ conv } \Rightarrow \sum x_n \text{ conv} \end{array}$$

*Stelling (**Vergelijking van groeisnelheid**):* (+Bewijs)

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \geqslant \frac{y_{n+1}}{y_n} \text{ vanaf zeker rangnummer: } \sum x_n \text{ conv } \Rightarrow \sum y_n \text{ conv}$$

8.3.2 Vier grote convergentieregels

*Stelling (**Integraaltest van Cauchy**): f dalend en naar beneden begrensd met* $\begin{array}{ll} s_n\text{:} & \textit{partieelsom functiewaarden} \\ I_n\text{:} & \textit{integraal van } f \textit{ van 1 tot } n. \end{array}$
$\Rightarrow$ *De verschilrij* $(s_n - I_n)$ *is dalend en convergent naar* $\lim \in [$*ondergrens,* $f(1)]$.
$\Rightarrow$ $\sum_{n\geqslant 1} f(n)$ *conv* $\Leftrightarrow I_n$ *conv.* (+Bewijs)

De hyperharmonische reeks

- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n^p}$
- Toepassing integraaltest: conv $\Leftrightarrow p > 1$ (+ Bewijs)
- De harmonische $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n}$ is divergent en stijgt zo vlug als $\ln x$.

- Voor n groot genoeg is $\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n} \approx \ln x + \gamma$
- $\gamma = 0.5772 =$ de constante van Euler

Uitbreiding van bovenlimiet: kan ook $+\infty$ zijn als reeks onbegrensd is.
*Stelling (**Worteltest van Cauchy**):* (+Bewijs)

$$\overline{\lim}_{n \to +\infty} \sqrt[n]{x_n} \quad \begin{array}{ll} < 1 & \sum x_n \text{ conv} \\ > 1 & \sum x_n \text{ div en } x_n \nrightarrow 0 \end{array}$$

*Stelling (**Convergentieregel van D'Alembert**):* (+Bewijs)

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \quad \begin{array}{ll} < 1 & \sum x_n \text{ conv} \\ > 1 & \sum x_n \text{ div en } x_n \nrightarrow 0 \end{array}$$

*Stelling (**Convergentieregel van Raabe**):* (+Bewijs)

$$\lim_{n \to +\infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) \quad \begin{array}{ll} > 1 & \sum x_n \text{ conv} \\ < 1 & \sum x_n \text{ div} \end{array}$$

De laatste drie convergentieregels hebben absolute varianten voor convergentie van complexe reeksen. Vervang x_n door $|z_n|$.

8.4 Convergentie van reële wisselreeksen

*Stelling (**Kenmerk van Leibniz voor wisselreeksen**):* (+Bewijs)

$$\left.\begin{array}{l} p_1 > p_2 > \dots \\ p_n \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{wisselreeks } p_1 - p_2 + p_3 - \dots \text{ convergent en reeks-} \\ \text{som tussen twee opeenvolgende partieelsommen.} \end{array}$$

9 Gelijkmatige convergentie

9.1 Gelijkmatige convergentie van rijen van functies

Puntsgewijze convergentie van functies:

$$\forall z \in A : f_n(z) \to f(z) \quad \text{notatie: } f_n \xrightarrow{A} f$$

$$\forall z \in A : \forall \varepsilon > 0 : \exists N_{z,\varepsilon} \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n \geqslant N_{z,\varepsilon} \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$$

Voorbeeld: $\arctan nx \xrightarrow{\mathbb{R}} \begin{cases} \frac{\pi}{2} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x < 0 \end{cases}$ De limietfunctie is niet continu.

Gelijkmatige convergentie van functies (notatie $f_n \overset{A}{\rightrightarrows} f$):

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N_{z,\varepsilon} \in \mathbb{N} : \forall \mathbf{z} \in \mathbf{A} : \forall n \in \mathbb{N} : n \geqslant N_{z,\varepsilon} \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$$

*Stelling (**Overdracht van continuïteit**): $f_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$, elke beperking $f_n/_{[a,b]}$ continu $\Rightarrow f/_{[a,b]}$ continu.* (+Bewijs)

*Stelling (**Omwisselen limiet en integraal**): $f_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$, x en x_0 tussen a en b* (+Bewijs)

$$g_n(x) = \int_{x_0}^{x} f_n(t)dt \quad g(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

dan $g_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} g$, of

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{x_0}^{x} f_n(t)dt = \int_{x_0}^{x} \lim_{n\to+\infty} f_n(t)dt$$

9.2 Gelijkmatige convergentie van reeksen van functies

Reeks van functies: $f_1 + f_2 + f_3 + \ldots = \sum f_n$ met $s_n = f_1 + \ldots + f_n$

Puntsgewijze conv	$s_n \overset{A}{\to} f$	$\forall z : f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ over A
Gelijkmatige conv	$s_n \overset{A}{\rightrightarrows} f$	$\forall \varepsilon \ldots : f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ gelijkmatig over A

Eveneens overdracht van continuïteit en omwisselen $\sum$ en $\int$.
*Stelling (**M-test van Weierstrass**): $\sum f_n$ complexe functiereeks* (+Bewijs)

$$\Big(\exists a_n : f_n(z) \leqslant a_n \; \forall z \;\wedge\; \sum a_n \text{ conv}\Big) \Rightarrow \sum f_n \text{ gelijkmatig convergent}$$

$\Rightarrow$ om de gelijkmatige convergentie van reeksen van functies na te gaan.

10 Complexe machtreeksen

10.1 Puntsgewijze convergentie

Een **machtreeks** is een oneindige som van de vorm $\sum_{n\geqslant 0}^{+\infty} a_n z^n$ waarbij a_n constanten zijn en z complex of reëel kan zijn (dan meestal x).
Dit is een speciaal geval omdat, in de punten (z) waarvoor deze reeksen convergent zijn, ze absoluut[1] convergent zijn. De punten z liggen in een schijf in het complexe vlak van Gauss.

[1] Uitzondering: dit geldt niet voor punten met modulus gelijk aan de convergentiestraal

De convergentiestraal

$$R := \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} \qquad \in [0, +\infty]$$

R wordt de convergentiestraal genoemd en $B(0, R)$ de convergentieschijf.
Stelling: (+Bewijs)

$R = 0$	$\Rightarrow$	$\sum_{n\geqslant 0}^{+\infty} a_n z^n$	alleen convergent voor $z = 0$
$0 < R < \infty$	$\Rightarrow$	$\sum_{n\geqslant 0}^{+\infty} a_n z^n$	absoluut convergent voor $\lvert z\rvert < R$ niet convergent voor $\lvert z\rvert > R$
$R = \infty$	$\Rightarrow$	$\sum_{n\geqslant 0}^{+\infty} a_n z^n$	over heel $\mathbb{C}$ convergent

Stelling: De convergentiestraal van $\sum_{n\geqslant 0}^{+\infty} a_n z^n$ *is* $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ *als die bestaat* (+Bewijs)
Stelling: a_n *begrensd* $\Rightarrow R \geqslant 1$ *en* $a_n \nrightarrow 0 \Rightarrow R \leqslant 1$ (+Bewijs)

Termsgewijze afgeleide van een machtreeks $\sum\limits_{n\geqslant 0}^{+\infty} a_n z^n : \sum\limits_{n\geqslant 1}^{+\infty} a_n n z^{n-1}$

Stelling: Een complexe machtreeks en haar termsgewijze afgeleide hebben dezelfde convergentiestraal (+Bewijs)
Hulpstelling: $\left|\frac{b^n - a^n}{b-a} - na^{n-1}\right| \leqslant |b-a| r^{n-2} \frac{n(n-1)}{2}$ (+Bewijs)
Stelling: De afgeleide van de limietfunctie is de limietfunctie van de termsgewijze afgeleide. (+Bewijs)
Stelling: De reekssom van een complexe machtreeks is $\in C^{+\infty}$ (+Bewijs)
Stelling: Het kan niet anders dan dat de coëfficiënten er als volgt uitzien: (+Bewijs)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \Rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Termsgewijze integratie van een r $\sum\limits_{n\geqslant 0}^{+\infty} a_n z^n : \sum\limits_{n\geqslant 0}^{+\infty} a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}$

Stelling: Voor reële x geldt: (complexe integratie is complex) (+Bewijs)

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

10.2 Gelijkmatige convergentie

Stelling: Complexe machtreeksen convergeren gelijkmatig over elke $\bar{B}(0, r) \subset B(0, R)$. (+Bewijs)
Wat met randpunten? Voor reële machtreeksen wordt in de cursus het trio van Abel bewezen voor $R = 1$ en $x = 1$.

*Stelling (**Ongelijkheid van Abel**): Als $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots \geqslant p_N \geqslant 0$ en C's willekeurige complexe getallen:* (+Bewijs)

$$|p_1 C_1 + p_2 C_2 + \ldots + p_N C_N| \leqslant p_1 \cdot \max\{|C_1|, |C_1 + C_2|, \ldots, |C_1 + \ldots C_N|\}$$

*Stelling (**Convergentiestelling van Abel**): Een reële machtreeks die conv is in $x = R = 1$, is gelijkmatig convergent over* $[0, 1]$. (+Bewijs)

*Stelling (**Limietstelling van Abel**): Als reekssom conv in $x = 1$, dan is de reekssom daar $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)$ gelijk aan de limiet voor de limietfunctie* $\lim_{x \to 1-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ (+Bewijs)

10.3 Taylorontwikkelingen

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \quad \forall x \in I$$

De oneindige veelterm uit het rechterlid is de **Taylorontwikkeling** van f. De coëfficiënten a_n zijn uniek bepaald, namelijk, $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Uit de meetkundige reeks

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$$

Dit wordt gewoon bekomen door in $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ in te vullen $q = -x$, dus geen Taylorberekeningen. Analoog worden $\frac{1}{1+x^2}$ en $\frac{1}{1-x^2}$ bekomen. Hieruit vloeien door termsgewijze integratie $\arctan x$, $\ln(1+x)$, $\operatorname{arg}\tanh x$.

Uit de formule van Taylor

*Stelling (**Formule van Taylor**): Als $n \in \mathbb{N}^+$, $\quad I \ni 0$, $\quad f \in C^n(I)$, dan geldt $\forall x \in I$:* (+Bewijs)

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + x^2 \frac{f''(0)}{2} + \ldots + x^{n-1} \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt$$

en $\exists \xi \in [0, x]$ of $[x, 0]$:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + x^2 \frac{f''(0)}{2} + \ldots + x^{n-1} \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} + x^n \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n)!}$$

Hierin is bovenaan de integraalgedaante van de restterm uitgedrukt en onderaan de restterm van Lagrange.

*Stelling (**Voldoende voorwaarde voor Taylorontwikkeling**): De gehele oneindige ontwikkeling valt pas samen met $f(x)$ over $]-a,a[$ als:*

* $f \in C^{+\infty}]-a,a[$
* $f^{(n)}(x) \leqslant G \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]-a,a[)$

(+Bewijs)

Stelling: De volgende Taylorontwikkelingen voldoen aan de voldoende voorwaarde over gans $\mathbb{R}$. (+Bewijs)

$$\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \\
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \\
\sinh x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots \\
\cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots
\end{aligned}$$

Uit de binomiaalreeks

Stelling: Voor α, ook $\in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$ geldt $\forall x \in]-1,1[$: (+Bewijs)

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots$$

Stelling: Als $\alpha > 0$, ook voor $-1 \leqslant x \leqslant 1$ conv, absoluut en gelijkmatig in $[-1,1]$. (+Bewijs)
Hieruit kunnen we (met $\alpha = \frac{-1}{2}$) de ontwikkeling afleiden voor $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$, en zo ook $\longrightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \longrightarrow \arcsin x \longrightarrow \arccos x$ en $\operatorname{arg}\sinh x$.

11 Fourierreeksen

Startvraag: kan iedere f ontwikkeld worden in sinussen en cosinussen?

11.1 De Singuliere Integraal van Dirichlet

*Stelling (**Hulpstelling van Riemann**): Als f integreerbaar is over $[a,b]$:* (+Bewijs)

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(x) \sin \lambda x \, dx = 0$$

DEF f is **stuksgewijze Lipschitzcontinu** over $[a,b]$ met een partitie π als $\exists C > 0 : |f(x) - f(x')| \leqslant C|x - x'|$ voor alle x en x' binnen eenzelfde deelinterval van π.
Stelling: Als stuksgewijze Lipschitzcontinu, dan: (+Bewijs)

- Gelijkmatig continu in ieder deelinterval
- $f(a+), f(b-), f(x-), f(x+)$ bestaan voor alle x.
- Integreerbaar

Stelling: Onderstaande schrijfwijzen van D_k (kernfunctie van Dirichlet) zijn gelijk. (+Bewijs)

$$\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos kx\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}\right)$$

*Stelling (**De Singuliere Integraal van Dirichlet** of de **zeefeigenschap**):* (+ Niet vanzelfsprekend bewijs)

$$f \text{ stuksg. L-continu over } [-\pi,\pi] \Rightarrow \lim_{k\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} fD_k = \frac{f(0+)+f(0-)}{2}$$

11.2 Convergentie van Fourierreeksen

De **Fourierreeks** van f is de reeks

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geqslant 1} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

waarbij $a_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos nu\, du$
en $b_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sin nu\, du$.

Wanneer zal de Fourierreeks nu conv $\to f$?

*Stelling (**Convergentiestelling van Fourrierreeksen voor periodieke functies**): Als f stuksgewijze Lipschitzcontinu is over $[-\pi,\pi]$ en f is 2π-periodiek, dan geldt $\forall x$:* (+Bewijs, niet simpel)

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$$

Als f stuksgewijze Lipschitzcontinu is:

DEF f^{π} is de **periodieke uitbreiding** van f $\hookrightarrow = f/_{[-\pi,\pi]}$ voortgezet met periode 2π.

DEF $f^{\pi,\nu}$ is de **genormaliseerde** periodieke uitbreiding van f $\hookrightarrow = \forall x \in \mathbb{R} : \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$.

$\Rightarrow$ **Convergentiestelling van Fourrierreeksen voor periodieke functies**:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx = f^{\pi,\nu}$$

Uitbreiding: met $[-L,L]$ ipv $[-\pi,\pi]$.

$$\begin{smallmatrix}a_n\\ b_n\end{smallmatrix} = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(u) \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}\, nu\frac{\pi}{L}\, du$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geqslant 1} a_n \cos nx\frac{\pi}{L} + b_n \sin nx\frac{\pi}{L}$$

12 Lineaire differentiaalvergelijkingen en stelsels

12.1 Lineaire differentiaalvergelijkingen van de eerste orde

$$\begin{aligned} y'(x) + a(x)y(x) &= R(x) \\ y'(x) + a(x)y(x) &= 0 \end{aligned}$$

De laatste vergelijking is de homogene gedaante van de eerste.
*Stelling (**Bestaan en enigheid**): Als U een open interval is dat x_0 bevat, met a en R continue functies over U en $\alpha \in \mathbb{R}$, dan heeft*

$$y'(x) + a(x)y(x) = R(x), \quad y(x_0) = \alpha$$

juist 1 oplossing over U, namelijk: (+Bewijs)

$$\varphi = e^{-\int a} \left(c + \int R\, e^{\int a} \right)$$

Stelling: Als de oplossing van de homogene een nulpunt heeft over U, dan is ze daar identisch 0. (+Bewijs)

12.2 Lineaire differentiaalvergelijkingen van de tweede orde, veranderlijke coëfficiënten

De homogene vergelijking

$$y'' + ay' + by = 0$$

Hierin zijn a en b reële functies die afhangen van x, maar genoteerd a en b ipv $a(x)$ en $b(x)$.
φ_1 en φ_2 kunnen twee oplossingen zijn, dan wordt de functie

$$W(\varphi_1, \varphi_2) \text{ gedefinieerd als} \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{vmatrix}.$$

Stelling: Als $W(\varphi_1, \varphi_2)$ een nulpunt heeft, dan $\equiv 0$. (+Bewijs)
DEF φ_1 en φ_2 zijn twee **onafhankelijke** oplossingen als $W(\varphi_1, \varphi_2) \neq 0$ in heel het interval.
Hulpstelling: (+Bewijs)
$f + Jf + J^2 f + J^3 f + \dots$ convergeert puntgew. in heel U; conv. gelijkmatig in elk compact interval $K \ni x_0$
voor

$$If(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt, \quad Jf(x) := -a(x)If(x) - b(x)\left(I(If)\right)(x)$$

Stelling: Een stel onafhankelijke oplossingen van $y'' + ay' + by = 0$ wordt gegeven door: (+Bewijs)

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 1 - I^2 \sum_{n=0}^{+\infty} J^n b \\ \varphi_2 &= \imath - I^2 \sum_{n=0}^{+\infty} J^n (a + b\imath) \end{aligned}$$

*Stelling (**Verlaging van de orde**): Als φ_1 een nulpuntloze oplossing, dan wordt een tweede oplossing φ_2, onafhankelijk van φ_1, gegeven door:* (+Bewijs)

$$\varphi_2 = \varphi_1 \int \frac{1}{\varphi_1^2 e^{\int a}}$$

*Stelling (**Bestaan en enigheid**): De vergelijking $y'' + ay' + by = 0$ heeft juist 1 oplossing voor $\begin{cases} y(x_0) = \alpha \\ y'(x_0) = \beta \end{cases}$, namelijk* (+Bewijs)

$$c_1\varphi_1 + c_1\varphi_2$$

Stelling: Oplossing φ van de homogene met afgeleide en waarde tegelijk $0 \Rightarrow \varphi \equiv 0$ over U. (+Bewijs)
Stelling: φ_1, φ_2 onafhankelijke oplossingen $\Rightarrow \{c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 | c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$ is de gehele oplossingenverzameling. (+Bewijs)

De niet-homogene vergelijking

$$y'' + ay' + by = R$$

Waarbij R geschreven wordt voor $R(x)$, een continue functie over U. Verrassend feit:
*Stelling (**Variatie van de constanten**): Als φ_1 en φ_2 onafh oplossingen zijn van de homogene, wordt een oplossing van de niet-homogene gegeven door* (+Bewijs)

$$\psi = \varphi_2 \int \frac{\varphi_1 R}{W(\varphi_1, \varphi_2)} - \varphi_1 \int \frac{\varphi_2 R}{W(\varphi_1, \varphi_2)}$$

*Stelling (**Bestaan en enigheid**): De vergelijking $y'' + ay' + by = R$ heeft juist 1 oplossing voor $\begin{cases} y(x_0) = \alpha \\ y'(x_0) = \beta \end{cases}$, namelijk* (+Bewijs)

$$c_1\varphi_1 + c_1\varphi_2 + \psi$$

Stelling: $\{c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \psi | c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$ is de gehele oplossingenverzameling. (+Bewijs)

12.3 Lineaire differentiaalvergelijkingen van de tweede orde, constante coëfficiënten

De homogene vergelijking

$$y'' + py' + qy = 0$$

$x^2 + px + q$ wordt de **kenmerkende drieterm** genoemd. De exponentiële van een complex getal wordt gedefinieerd als

$$e^{a+ib} := e^a(\cos b + i \sin b), \text{ zodat } e^{\lambda x\prime} = \lambda e^{\lambda x}$$

Stelling: De oplossingenverzameling is afhankelijk van de nulpunten van de karakteristieke drieterm en wordt gegeven door: (+Bewijs)

$$\text{Nulptn van } x^2 + px + q: \begin{array}{lcl} \text{2x reëel} & \rightarrow & \text{opl } \{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\} \\ \text{toeg. complex} & \rightarrow & \text{opl } \{e^{ax} \cos bx, e^{ax} \sin bx\} \\ \text{dubbelwortel} & \rightarrow & \text{opl } \{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}\} \end{array}$$

De niet-homogene vergelijking

$$y'' + py' + qy = R$$

Analoog als bij de veranderlijke coëfficiënten: als φ_1 en φ_2 gekend zijn (evt. φ_2 berekenen door verlaging van de orde), dan kan ψ gevonden worden door variatie van de constanten. In een speciaal, maar veelvoorkomend geval kan ψ zelfs gevonden worden zonder $\varphi_2 \int \frac{\varphi_1 R}{W(\varphi_1,\varphi_2)} - \varphi_1 \int \frac{\varphi_2 R}{W(\varphi_1,\varphi_2)}$, namelijk als R van de vorm is

$$e^{ax} \left(C(x) \cos bx + S(x) \sin bx\right)$$

of als de constanten ook complex mogen zijn:

$$e^{cx} \left(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_N x^N\right)$$

De oplossingen worden door twee stellingen gegeven, de complexe hulpstelling en de reële variant. De oplossingen zijn afhankelijk van c, die al dan niet een wortel is van de kenmerkende drieterm.
Stelling: De oplossingen van

$$y'' + py' + qy = e^{cx} \left(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_N x^N\right)$$

worden gegeven door: (+Bewijs)

$$\begin{array}{lcl} c \text{ is geen wortel} & \rightarrow & \text{opl } e^{cx} \left(d_0 + d_1 x + \ldots + d_N x^N\right) \\ c \text{ is enkelv wortel} & \rightarrow & \text{opl } xe^{cx} \left(d_0 + d_1 x + \ldots + d_N x^N\right) \\ c \text{ is dubbelwortel} & \rightarrow & \text{opl } x^2 e^{cx} \left(d_0 + d_1 x + \ldots + d_N x^N\right) \\ & & = e^{cx} \left(c_0 \frac{x^2}{2} + c_1 \frac{x^3}{6} + \ldots + c_N \frac{x^{N+2}}{(N+1)(N+2)}\right). \end{array}$$

De volgende stelling is de reële versie van de voorgaande stelling, en verloopt vrij analoog.

*Stelling (**Onbepaalde coëfficiënten**): De oplossingen van* $y'' + py' + qy = e^{ax}\left(C(x)\cos bx + S(x)\sin bx\right)$ *worden gegeven door:* (+Bewijs)

$$\begin{array}{lcl} a+ib \text{ is geen wortel} & \rightarrow & \text{opl } e^{ax}\left(C_0(x)\cos bx + S_0(x)\sin bx\right) \\ a+ib \text{ is enkelv wortel} & \rightarrow & \text{opl } xe^{ax}\left(C_0(x)\cos bx + S_0(x)\sin bx\right) \\ a \text{ is de dubbelwortel} & \rightarrow & \text{opl } e^{ax}\left(\text{2x geïntegr van } C(x) \text{ van } 0 \rightarrow x\right) \end{array}$$

Waarbij $C_0(x)$ en $S_0(x)$ veeltermen zijn met

$$\max\{\text{gr}C_0,\ \text{gr}S_0\} = \max\{\text{gr}C,\ \text{gr}S\}$$

12.4 Stelsels lineaire differentiaalvergelijkingen van de eerste orde, constante coëfficiënten

$$\begin{cases} y_1'(x) + a_{11}y_1(x) + a_{12}y_2(x) + \ldots + a_{1n}y_n(x) = R_1(x), & y_1(x_0) = \alpha_1 \\ y_2'(x) + a_{21}y_2(x) + a_{22}y_2(x) + \ldots + a_{2n}y_n(x) = R_2(x), & y_2(x_0) = \alpha_2 \\ \vdots & \vdots \\ y_n'(x) + a_{n1}y_n(x) + a_{n2}y_2(x) + \ldots + a_{nn}y_n(x) = R_n(x), & y_n(x_0) = \alpha_n \end{cases}$$

Dit kan in matrixnotatie geschreven worden, met $\mathbf{A}$ een reële $n \times n$-matrix en alle $\vec{\ }$ kolommatrices:

$$y'(\vec{x}) + \mathbf{A}y(\vec{x}) = R(\vec{x}), \quad y(\vec{x_0}) = \vec{\alpha}$$

Stelling: De oplossing van voorgaand stelsel is, mits de juiste definitie voor exponentiële van een matrix en voor de hand liggende definities: (+Bewijs)

$$\varphi(\vec{x}) = e^{-\mathbf{A}x}\left(\vec{c} + \int e^{\mathbf{A}x} R(\vec{x})\, dx\right)$$