Antwoorden op de theoretische vragen in de examen voorbereiding

Theorie vraag
Zij A een $m \times n$-matrix.
Geef het verband tussen de formule voor de "dimensie" d van een niet-strijdig stelsel,

$$d = n - \text{rang } (A)$$

(zie stelling 4.11)*, en de formule*

$$\dim V = \dim \ker T + \dim T(V)$$

(zie stelling 5.22)*.*
(*In de opgave stond* $d = m - \text{rang } (A)$*, het moet* $d = n - \text{rang } (A)$ *zijn.*)

Antwoord:
Beschouw A als lineaire afbeelding van $K^n \to K^m$ (door linksvermenigvuldiging). Dan is het beeld van de afbeelding, $A(K^n) \subset K^m$, voortgebracht door de kolommen van A. Dus het aantal lineair onafhankelijke kolommen van A, dit is rang A, is de dimensie van het beeld $A(K^n)$.
De "dimensie" d van de oplossingsverzameling van het stelsel $AX = B$ is gelijk aan de dimensie van de oplossingsverzameling van het homogene stelsel $AX = 0$. Die oplossingsverzameling is de kern van A. Besluit

- $d = \dim \ker A$,
- $\text{rang } A = \dim A(K^n)$,
- $n = \dim K^n$

De twee formules zijn dus gelijk!

Theorie vraag
Bepaal de parity-check matrix van een $(9,5)$*-lineair code met als basis vectoren de kolommen:*

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Antwoord. Je moet de $(4, 9)$-matrix C bepalen zodat de ruimte opgespannen door de gegeven kolommen de kern is van C. Je moet dus de matrix vergelijking

$$C \cdot A = 0$$

oplossen, (met A de matrix waarvan de kolommen de gegeven vectoren zijn). Je kan evengoed de vergelijking

$$A^t \cdot C^t = 0$$

oplossen. De kolommen van C^t zijn dan juist een basis voor de kern van A^t.
(Zulk een stelsel kunnen we met Maple oplossen (ook over het veld met 2 elementen).

> with(LinearAlgebra:-Modular):
> p := 2;
> N := Basis(p,A,row,false,column);)

Je bekomt de volgende oplossing:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Theorie vraag.
Zij A de $(n \times n)$-matrix en $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de wortels van de karakteristieke vergelijking van A. Onderstel dat $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ en voor alle $i, j = 3, \ldots, n$, $|\lambda_n| < |\lambda_{n-1}| < \ldots |\lambda_3| < 1$.
Zij W de deelruimte voortgebracht door de eigenvectoren die horen bij de eigenwaarden $\lambda_3, \ldots, \lambda_n$, en W' een complement van W, dit betekent $\mathbb{R}^n = W \oplus W'$ (zie les 6 blz. 77).

(a) *Toon aan elke element $v \in \mathbb{R}^n$ op unieke manier te schrijven is als*

$$v = w + w', \text{ met } w \in W \text{ en } w' \in W'.$$

De vector w' noemen we de ***projectie*** *van v op W',we noteren $w' := p_{W'}(v)$.*
(b) *Toon aan dat*

$$\lim_{k \to \infty} (A^k v - A^k p_{W'}(v)) = 0.$$

Antwoord:
(a) Er bestaat een basis $\{w_1, \ldots, w_r, w'_1, \ldots, w'_s\}$ voor $\mathbb{R}^n$, met $r + s = n$ en $\{w_1, \ldots, w_r\}$ een basis voor W, $\{w'_1, \ldots, w'_s\}$ een basis voor W'. (Zie les 6 blz. 77.)
Zij $v \in \mathbb{R}^n$ en $v = w + w'$ met $w \in W$ en $w' \in W'$. Dan is $w = \sum_i \lambda_i w_i$ en $w' = \sum_j \lambda_j w'_j$. Dus is $v = \sum_i \lambda_i w_i + \sum_j \lambda_j w'_j$. De coëfficiënten van v ten opzichte van de gegeven basis worden uniek door v bepaald, dus ook w en w' zijn uniek door v bepaald.

(b) $A^k v - A^k p_{W'}(v) = A^k v - A^k w' = A^k(v - w') = A^k w$.
Vermits de $\lambda_3, \ldots, \lambda_n$ verschillende eigenwaarden zijn, vormen de bijbehorende eigenvectoren $u_3, \ldots, u_n$ een basis voor W. Dus

$$w = \sum \alpha_i u_i.$$

Dan is

$$A^k w = \sum \lambda_i^k \alpha_i u_i.$$

Uit $\lim_{k\to\infty} \lambda_i^k = 0,$ voor $i = 3, \ldots, n$ volgt

$$\lim_{k\to\infty} (A^k v - A^k w) = 0.$$

Theorie vraag

	W1	W2	W3	W4	W5	W6
W1	0	1	1	1	1	1
W2	1	0	1	0	1	0
W3	0	1	0	0	1	1
W4	1	0	1	0	0	0
W5	1	1	0	1	0	1
W6	0	1	1	1	1	0

Dit is een tabel die de links aangeeft in 6 Webpaginas. Op de eerste rij staat er dat de webpaginas W2, ..., W6 een link hebben naar webpagina W1. Op de tweede rij staat er dat webpagina W1, W3 en W5 een link hebben naar pagina W2, enz.

Voorspel zonder berekening welke rangorde Google aan de webpagina zal toekennen.
Bepaal de rangorde volgens het principe zoals besproken in paragraaf 4 van les 6. (Gebruik de kansverdeling: 85% volgen van een link, 15% naar een random pagina.)
Vergelijk het resultaat met je voorspelling.

Antwoord
(a) Er zijn 5 links naar pagina W_1, 3 links naar paginas W_2, W_3, 2 links naar pagina W_4, en 4 links naar de paginas W_5 en W_6. Dit geeft reeds de rangschikking

$$W_1, W_5 \text{ samen met } W6, W_2 \text{ samen met } W_3, W_4.$$

Vermits de belangrijkste pagina W_1 een link heeft naar W_5 maar niet naar W_6, zal google W_5 hoger ranken dan W_6. Analoog zal google W_2 hoger ranken dan W_3

(b) De markov matrix opgesteld volgens de procedure beschreven in de nota's is voor dit voorbeeld:

$$\begin{pmatrix} 1/40 & \frac{19}{80} & \frac{19}{80} & \frac{37}{120} & \frac{19}{80} & \frac{37}{120} \\ \frac{37}{120} & 1/40 & \frac{19}{80} & 1/40 & \frac{19}{80} & 1/40 \\ 1/40 & \frac{19}{80} & 1/40 & 1/40 & \frac{19}{80} & \frac{37}{120} \\ \frac{37}{120} & 1/40 & \frac{19}{80} & 1/40 & 1/40 & 1/40 \\ \frac{37}{120} & \frac{19}{80} & 1/40 & \frac{37}{120} & 1/40 & \frac{37}{120} \\ 1/40 & \frac{19}{80} & \frac{19}{80} & \frac{37}{120} & \frac{19}{80} & 1/40 \end{pmatrix}$$

De eigenvector behorende bij de eigenwaarde 1 is:

$$\begin{pmatrix} 1.3 & 0.96 & 0.89 & 0.70 & 1.2 & 1.0 \end{pmatrix}$$

We bekomen dus

PageRank(W_1)=1.3 PageRank(W_2)=0.96 PageRank(W_3)=0.89
PageRank(W_4)=0.70 PageRank(W_5)=1.2 PageRank(W_6)=1.0

Dit is in overeenstemming met onze voorspelling.

Theorie vraag.

	W1	W2	W3	W4	W5	W6	W7	W8
Science	3	1	0	0	3	1	2	0
Literature	2	3	1	1	0	1	0	0
Art	2	3	2	1	1	3	0	2
Architecture	1	0	3	1	3	3	3	3
Tourism	0	0	3	3	0	0	0	3

In de tabel staat voor elke webpagina van een bepaalde site een gewicht bij bepaalde sleutelwoorden. Dit gewicht geeft aan of de pagina relevante informatie bevat over het onderwerp.
3= Zeer relevant, 2= relevant, 1= nuttig, 0 = niet relevant.

Om de bezoekers van de site naar de voor hun interessante pagina te verwijzen wordt gevraagd om de volgende informatie in te brengen:

> Geef voor elk sleutel woord aan hoe belangrijk informatie over dat onderwerp voor u is.
>
> 3= Zeer relevant, 2= relevant, 1= nuttig, 0 = niet relevant.

Geef een algoritme dat de ingebrachte informatie omzet in een rangorde van de pagina's, van belangrijk naar minder belangrijk.

Antwoord We maken een matrix met in de i-de kolommen de relevanties van de i-de pagina voor de verschillende items, we normeren elke kolom zo dat we een vector is met lengte 1 (voor het standaard Euclidisch inproduct) bekomen.
We doen het zelfde met de zoekvector die ingebracht wordt en bepalen de cosinus van de hoek tussen deze vector en de kolommen. De kolom waarvoor de cosinus het grootst is (de hoek is dan minimaal) komt overeen met de "meest relevante pagina".
Je bekomt het volgende resultaat:

$$\begin{pmatrix} 0.68 & \underline{0.95} & 0.57 & 0.46 & 0.32 & 0.77 & 0.19 & 0.46 \end{pmatrix}.$$

Theorie vraag.
Toon aan dat voor alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|}(\cos(\arg(z)) - i\sin(\arg(z))) = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Antwoord: Vermenigvuldig z met $\frac{1}{|z|}(\cos(\arg(z)) - i\sin(\arg(z)))$ en verifieer dat het resultaat gelijk is aan 1.
Vermenigvuldig z met $\frac{\overline{z}}{|z|^2}$ en verifieer dat het resultaat gelijk is aan 1.

Theorie vraag.
(a) *Toon aan dat de transformatie*

$$T_\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C}; z \mapsto \alpha z$$

met $\alpha \in \mathbb{C}$, een lineaire afbeelding is van de 1-dimensionale $\mathbb{C}$-vectorruimte.
Toon aan dat T_α een lineaire afbeelding is van de 2-dimensionale $\mathbb{R}$-vectorruimte $\mathbb{C}$.

(b) *Kunnen alle Möbiustransformaties van $\mathbb{C}$ voorgesteld worden door 2×2 matrices met determinant 1?*

Antwoord: (a)

$$T_\alpha(\lambda z + \mu z') = \alpha((\lambda z + \mu z') = \lambda\alpha z + \mu\alpha z' = \lambda T_\alpha(z) + \mu T_\alpha(z').$$

Dit geldt voor alle $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, wat impliceert dat T_α een $\mathbb{C}$-lineaire afbeelding is. Vermits dit eveneens geldt voor alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ is het ook een $\mathbb{R}$-lineaire afbeelding.
(b) Een Möbiustransformatie $\frac{az+b}{cz+d}$ wordt voorgesteld door eeen matrix

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Als $\det A$ gelijk is aan nul dan zijn de rijen evenredig en volgt dat de Möbiustransformatie een constante afbeelding is,

$$\frac{\alpha cz + \alpha d}{cz + d} = \alpha.$$

Als $\det A = d \neq 0$ dan geldt

$$\frac{\frac{a}{\sqrt{d}}z + \frac{b}{\sqrt{d}}}{\frac{c}{\sqrt{d}}z + \frac{d}{\sqrt{d}}} = \frac{az+b}{cz+d}.$$

De matrixvoorstelling van het linkerlid is een matrix met determinant gelijk aan 1.

Theorie vraag.
Zij A een $m \times n$ matrix over een veld K.
Juist of fout, argumenteer je antwoord.

(a) Als $m \geq n$ dan is $\text{rang}(A) = n$ als en slechts als het homogene stelsel $AX = 0$ een unieke oplossing heeft.

(b) Als $m \leq n$ dan is $\text{rang}(A) = n$ als en slechts als het homogene stelsel $AX = 0$ een unieke oplossing heeft.

Antwoord:
(a) Een niet strijdig stelsel, bv. een homogeen stelsel, heeft een unieke oplossing als en slechts als de dimensie van de oplossingsverzameling gelijk is aan nul. Uit stelling 4.11 volgt dus dat er een unieke oplossing is als en slechts als de rang van de matrix A gelijk is aan n (het aantal kolommen van A).
(b) Als de rang van A gelijk is aan n en $m \leq n$ dan moet $m = n$, dat $AX = 0$ een unieke oplossing heeft volgt nu uit punt (a).
Omgekeerd stel dat $AX = 0$ een unieke oplossing heeft. Als er meer vegelijkingen dan onbekenden zijn heeft een homogeen stelsel oneindig veel oplossingen. Dus $m \leq n$. Dat de rang van A gelijk is aan n volgt nu opnieuw uit punt (a).

Theorie vraag
Zij A een willekeurige 4×4-matrix die een eigenwaarde gelijk nul heeft en zodat de ruimte voortgebracht door de eigenvectoren die behoren bij de eigenwaarde nul dimensie 2 heeft. Zij J_4 de 4×4-matrix met alle componenten gelijk aan 1.

(a) *Bewijs dat $A + J_4$ steeds een eigenwaarde nul heeft.*

(b) *Geef een voorbeeld van een 4×4-matrix B die een eigenwaarde nul heeft en zodat alle eigenwaarden van $B + J_4$ verschillend zijn van nul.*

Antwoord:
(a) Merk op dat $\ker J_4$ een drie dimensionale deelruimte is van K^4, K het veld waarover A gedefinieerd is. Er is dus een 3-dimensionale deelruimte van eigenvectoren bij de eigenwaarde 0. Noem deze ruimte W.
Zij U de 2-dimensionale deelruimte van K^4 van eigenvectoren van A met eigenwaarde 0. De deelruimte $W \cap U$ is niet gelijk aan de nul ruimte, vermits een basis voor W en een basis voor U samen een lineair afhankelijk stel vormen (de kardinaliteit van dit stel is immers groter dan de dimensie van de ganse ruimte).
Een vector $v \in W \cap U$ is een eigenvector voor $A + J_4$ met eigenwaarde 0.
(b) Beschouw de matrix

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

de vector $(1, 0, 0, 0,)$ is een eigenvector met eigenwaarde 0. De matrix

$$B + J_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

is inverteerbaar vermits de kolommen een basis vormen voor K^4, deze matrix heeft dus geen eigenvector met eigenwaarde gelijk aan nul.

Theorie, juist of fout vragen.

Zijn de volgende uitspraken juist of fout. Argumenteer je antwoord.

1. Elke lineaire afbeelding van het complexe vlak als 2-dimensionale $\mathbb{R}$-vectorruimte komt overeen met vermenigvuldigen met een complex getal.

   Antwoord: *Fout.* Neem een lineaire transformatie van het vlak die niet de nulafbeelding is en ook geen bijectie is (bv. de projectie op de reële as). Die afbeelding kan niet gelijk zijn aan de vermenigvuldiging met een complex getal.

2. Zij A, B twee willekeurige matrices over een veld zodat de producten AB en BA gedefinieerd zijn. Dan is $\det AB = \det A \det B = \det BA$.

   Antwoord: *Fout.* Als A een $m \times n$-matrix is en B is een $n \times m$ matrix, met $m \neq n$, dan zijn de producten AB en BA gedefinieerd maar $\det A$ en $\det B$ zijn niet gedefinieerd. Men kan met eenvoudige voorbeelden ook inzien dat voor zulke matrices $\det AB$ niet altijd gelijk is aan $\det BA$.

3. Een vierkante matrix A is inverteerbaar als en slechts als het stelsel $AX = 0$ een unieke oplossing heeft.

   Antwoord: *Juist.*

   Dit volgt uit een combinatie van Gevolg 3.12 en Stelling 4.7

4. Zij V een eindig dimensionale K-vectorruimte. Zij $v_1, \ldots, v_k \in V$. Als

   $$\lambda_1 v_1 + \cdots \lambda_k v_k = 0$$

   een niet triviale lineaire combinatie is die gelijk is aan nul, dan geldt voor alle j, zodat $\lambda_j \neq 0$, dat v_j een lineaire combinatie van de andere vectoren.

   Antwoord: *Juist.*

   $$\lambda_j v_j = -\sum_{i \neq j} \lambda_i v_i$$

   hieruit volgt als $\lambda_j \neq 0$ dat

   $$v_j = -\sum_{i \neq j} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} v_i.$$

5. Zij T een voortbrengend stel voor de K-vectorruimte V en L een lineair onafhankelijk stel in V dat geen basis is. Dan is $|T| > |L|$.

   Antwoord: *Juist.*

   T bevat een basis dus $|T| \geq \dim V$. L is echt bevat in een basis dus $\dim V > |L|$. (Zie Stelling 5.10).

6. Elke lineaire operator op een eindig dimensionale vectorruimte over de reële getallen kan voorgesteld worden door een boven-driehoeksmatrix.

   Antwoord: *Fout.* Neem een matrix die geen reële eigenwaarden heeft, bv. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Deze matrix, gezien als operator, kan niet voorgesteld worden door een bovendriehoeksmatrix over $\mathbb{R}$, omdat de diagonaalelementen van een bovendriehoeksmatrix de eigenwaarden zijn van de operator.

7. Elke lineaire afbeelding van een vectorruimte V naar een vectorruimte W kan voorgesteld worden door een boven-driehoeksmatrix.

   Antwoord: *Juist.* neem de rij-echelonvorm van een matrix, dat is een bovendriehoeksmatrix. (Het verschil met vraag 6 zit in het feit dat we nu de basis in het domein en in de beeldruimte vrij kunnen kiezen.)

8. Als (V, g) een inproductruimte is (met een symmetrisch inproduct) en $\det G = 0$ met G een Grammatrix van het inproduct. Dan is de kern van de inproductruimte niet gelijk aan de nulruimte.

   Antwoord: *Juist.*

   Zie Stelling 7.5.

9. Zij $E = (V, \langle -, - \rangle)$ een Euclidische ruimte. Als $\langle v, w \rangle = ||v|| \cdot ||w||$, dan is $\{v, w\}$ een lineair afhankelijk stel in V.

   Antwoord: *Juist.*

   Zie Stelling 8.6 (Cauch-Schwarz).

10. Zij A een $m \times n$-matrix over de reële getallen. Een *kleinste-kwadraat-oplossing* van het stelsel $AX = d$ is altijd uniek.

    Antwoord: *Fout.* Zij p de orthogonale projectie van d op $A(K^n)$. Dan is een kleinste-kwadraat-oplossing een oplossing van het stelsel $Ax = p$. Dit stelsel heeft enkel een uniek oplossing als de rang van A gelijk is aan n. (Zie ook Stelling 8.25).

11. Een affiene transformatie op een Euclidische ruimte wordt gegeven door een lineaire operator op de onderliggende vectorruimte.

    Antwoord: *Juist.* Een affiene transformatie beeldt niet altijd de nul op de nul af, neem bv. een translatie over een niet-nul vector.

12. Er is een bijectie tussen de groep $SO_2(\mathbb{R})$ en de groep $U_1 = \{z \in \mathbb{C} | \overline{z}z = 1\}$.

    Antwoord: *Juist.* De bijectie zwordt gegeven door

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \leftrightarrow \cos\theta + i\sin\theta.$$

13. Elke rotatie in de drie-dimensionale ruimte E^3 heeft een eigenwaarde gelijk aan 1.

    Antwoord: *Juist.*

    Volgt uit de definitie van een rotatie in E^3.

14. Zij A de Grammatrix van een symmetrisch inproduct op $\mathbb{R}^n$. Dan is er een orthogonale matrix $P \in M_n(\mathbb{R})$ zodat P^tAP een diagonaal matrix is. De componenten op de diagonaal zijn de eigenwaarden van A.

    Antwoord: *Juist.*

    Zie les Spectraalstellingen, Stelling 10.8.

    (De laatste les, “Spectraalstellingen” is geen onderdeel van de examenstof, gezien we te weinig tijd hadden voor deze les.)