25.I.08 – Wiskundige Analyse III,
theorie (= 70% van de punten)

- *Beantwoord elke vraag op één van de dubbele geruite bladen. Schrijf op elk van die dubbele geruite bladen bovenaan uw naam en het Romeinse cijfer van de vraag. Stop de dubbele geruite bladen II, III en IV in die volgorde in het dubbele geruite blad I. De ongeruite bladen dienen voor het klad en moeten niet ingediend worden, evenmin als het blad met de opgaven.*
- *De bewijzen hoeven niet langer of explicieter te zijn dan in de cursus, en alles wat er in de cursus aan voorafgaat mag zonder meer gebruikt worden.*

Vraag I. [Opmerking: Radon-Nikodým is anders ingekleed in de editie 2008-2009. CI.]

1. Definieer 'k-verzameling' en 'g-verzameling'.
2. Definieer $\nu \ll \mu$.
3. Geef de opgave van Radon-Nikodým voor eindige maten.
4. Geef het begin van het bewijs, nl. de *constructie van een stijgende familie bestaande uit k-verzamelingen verenigd met een nulverzameling.*
5. Geef het verband tussen de gezochte functie en die stijgende familie (twee inclusies, geen bewijs, geen uitleg).

Vraag II.

1. Definieer 'trapfunctie in Ω' (Ω open).
2. Vul aan en bewijs: *Zij $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ open en $f : \Omega \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integreerbaar. Dan bestaat er....* (In die stelling, voorafgaand aan het kenmerk van Mikusiński, komen trapfuncties en 'b.o.' voor.) Uitgangspunt is het bestaan van een rij van trapfuncties in Ω die in L^1-norm én bijna overal in Ω naar f convergeert.

Vraag III. Bewijs voor $c < 0$ dat $\int_D (cf) = c \int_D f$ als $f : D \to \mathbb{R}$ integreerbaar is.

Vraag IV.

1. Geef de formule van de *hulpstelling van Fatou* (enkel de formule, geen proza)
2. Beantwoord met JA of NEEN (niets toevoegen):
   (a) Het complement van een G_δ-verzameling is ook een G_δ-verzameling.
   (b) Het complement van een Borelverzameling is ook een Borelverzameling.
   (c) De afgeleide f' van een afleidbare $\mathbb{R}$-$\mathbb{R}$ functie f is Lebesguemeetbaar.
   (d) Elke vereniging van nietledige intervallen van $\mathbb{R}$ is Lebesguemeetbaar.
   (e) Elke karakteristieke afbeelding van een meetbare verzameling is integreerbaar.

EINDE THEORIE

Wie zijn theorie afgegeven heeft (dat moet ten laatste om 11.30 gebeuren) krijgt de opgave voor een oefening. Bij het oplossen daarvan mag men de syllabus en de in de loop van het semester behandelde oefeningen vrij consulteren. De oefening moet ten laatste om 12.30 afgegeven worden.

21.VIII.08 – Wiskundige Analyse III,
theorie (= 70% van de punten)

- *Beantwoord elke vraag op één van de dubbele geruite bladen. Schrijf op elk van die dubbele geruite bladen bovenaan uw naam en het Romeinse cijfer van de vraag. Stop de dubbele geruite bladen vanaf II in het dubbele geruite blad I. De ongeruite bladen dienen voor het klad en moeten niet ingediend worden, evenmin als het blad met de opgaven.*
- *De bewijzen moeten niet langer of explicieter zijn dan in de cursus, en alles wat er in de cursus aan voorafgaat mag zonder meer gebruikt worden. Staat er in de cursus 'analoog' of 'wegens de stelling van X', dan mag u dat ook zo schrijven.*
- *Als een vraag u niet helemaal duidelijk is, vraag dan toelichting.*
- *U mag geen rekenmachine gebruiken.*

Vraag I.

1. De intuïtieve regel
$$\lambda_2(\Phi(V)) \approx |\det \Phi'(a,b)| \operatorname{opp}(V)$$
wordt precies gemaakt in een stelling die twee ongelijkheden
$$\ldots \leqslant \lambda_2(\Phi(V)) \leqslant \ldots$$
bevat. Geef de opgave van die stelling, en bewijs ze dan, *in de veronderstelling dat de Jacobiaanse matrix de bijzondere gedaante heeft die opgave en bewijs vereenvoudigt.* Maak ook de bijhorende figuren.

Vraag II.

1. Geef de definitie van (i) $\operatorname{diam} V$, (ii) $d(A,B)$, (iii) $h^*_{n,\alpha,\delta}(Y)$ en (iv) $h^*_{n,\alpha}(Y)$.
2. Vul aan bewijs: *als* ... (een voorwaarde met afstanden en/of diameters)) *dan is* $h^*_{n,\alpha}(X_1 \cup X_2) = h^*_{n,\alpha}(X_1) + h^*_{n,\alpha}(X_2)$.

Vraag III.

1. Formuleer (GEEN BEWIJS) de stelling over de monotone convergentie.
2. Formuleer en bewijs de hulpstelling van Fatou.
3. Formuleer (GEEN BEWIJS) de stelling over de gedomineerde convergentie.

Vraag IV. Beantwoord met JA of NEEN (niets toevoegen):

1. Elke trapfunctie is Lebesgue-integreerbaar
2. Elke simpele afbeelding is Lebesgue-integreerbaar
3. Het product van twee Lebesgue-integreerbare $\mathbb{R}$-waardige afbeeldingen is Lebesgue-integeerbaar
4. Elke rij van $\overline{\mathbb{R}}$-waardige afbeeldingen convergeert naar een $\overline{\mathbb{R}}$-waardige afbeelding
5. Elke bedekking van een compacte verzameling kan herleid worden tot een deelbedekking die eindig of aftelbaar is

EINDE THEORIE

Wie zijn theorie afgegeven heeft (dat moet ten laatste om 11.30 gebeuren) krijgt de opgave voor een oefening. Bij het oplossen daarvan mag men de syllabus en de in de loop van het semester behandelde oefeningen vrij consulteren. De oefening moet ten laatste om 12.30 afgegeven worden.