21.I.08

Wiskundige Analyse I, theorie
(= 60% van de punten)

- *Beantwoord elke vraag op één van de dubbele geruite bladen. Schrijf op elk van die dubbele geruite bladen bovenaan uw naam en het Romeinse cijfer van de vraag. Stop de dubbele geruite bladen II, III en IV in die volgorde in het dubbele geruite blad I. De ongeruite bladen dienen voor het klad en moeten niet ingediend worden, evenmin als het blad met de opgaven.*
- *De bewijzen moeten niet langer of explicieter zijn dan in de cursus, en alles wat er in de cursus aan voorafgaat mag zonder meer gebruikt worden.*
- *U mag geen rekenmachine gebruiken.*

Vraag I.

1. Geef $\overline{\lim}_{n\to+\infty} x_n = \ldots$ (formule met een lim en een sup of inf) en $= \ldots$ (formule zonder lim).
2. Geef $R = \ldots$ (definitie van de convergentiestraal van $\sum_n a_n x^n$)
3. Vul aan (geen bewijs): *als de limiet ... bestaat, dan is deze de convergentiestraal.*
4. Formuleer en bewijs de stelling over de binomiaalreeks.

Vraag II.

1. Vul aan en bewijs voor $c < 0$: *als ..., dan* $\underline{\int_a^b}(cf) = c\int_a^b f$.
2. Vul aan en bewijs: *als ..., dan* $\int_a^b f + \int_a^b g \leqslant \underline{\int_a^b}(f+g)$.

Vraag III.

1. Wat zijn de 'eigenwaarden' van een matrix $\mathcal{A}$?
2. Formuleer de stelling van Cayley-Hamilton.
3. Formuleer en bewijs de stelling van Putzer.

Vraag IV.

1. Geef de formule (enkel de formule, geen proza) voor de oplossing van $y'(x)+a(x)y(x) = b(x)$.
2. Geef de formule (enkel de formule, geen proza) die uitgaande van een oplossing van $y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$ een tweede oplossing geeft.
3. Vul in : $\int_0^{1/10} \frac{dt}{1+t^2} > \cdots > 0$.
4. Beantwoord met JA of NEEN (niets uitleggen of toelichten, enkel JA of NEEN)
   (a) een constante functie is dalend
   (b) een over $[a, b]$ dalende functie is integreerbaar over $[a, b]$
   (c) de reekssom van een convergente reeks van over $\mathbb{R}$ continue functies is continu over $\mathbb{R}$
   (d) een meetkundige reeks convergeert als haar algemene term naar nul nadert.

EINDE THEORIE

Tijd tot 12.30. Oefeningen: 14.00.

Examen oefeningen Wiskundige Analyse I

1ste Bachelor Wiskunde
Eerste zittijd 2007-2008

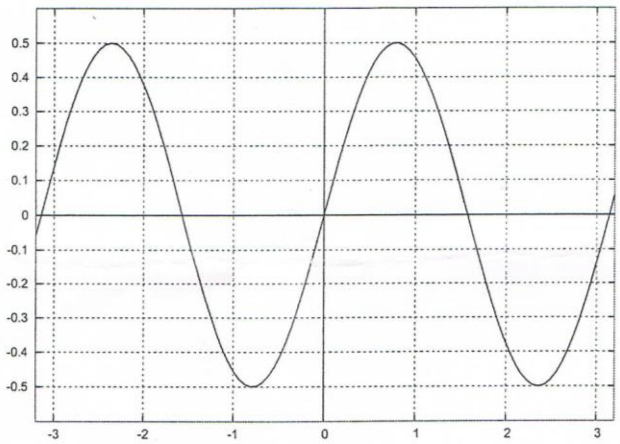
(= 40% van de punten)

⋆ *Maak elke oefening op een afzonderlijk blad.*
⋆ *Schrijf op elk blad je naam en richting.*
⋆ *Het gebruik van een rekenmachine is niet toegelaten.*

1. Ga de convergentie na van de volgende reeks in functie van $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n \geq 1} (-x)^n n^3 \sinh\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

2. (a) Bepaal de Fourierreeks van de functie $f(x) := \sin(x)\cos(x)$ (zie figuur) t.o.v. het interval $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.



(b) Onderzoek de convergentie van de gevonden reeks (maak een figuur ter verduidelijking).

(c) Beschrijf hoe je een cosinusreeks van f zou construeren t.o.v. het interval $[0, \frac{\pi}{4}]$. Bespreek de convergentie van deze cosinusreeks en duid in $[0, \frac{\pi}{4}]$ de verschillen aan met de in (a) gevonden Fourierreeks.

3. Bepaal de algemene oplossing van de volgende differentiaalvergelijking:

$$y''(x) + \sqrt{2}\, y'(x) + 2y(x) = \sinh(x)\sin(x).$$

⋆⋆⋆ Veel succes! ⋆⋆⋆

Tijd tot 18.00