1ste Ba Fysica en Sterrenkunde — 20.VI.08

Wiskundige Analyse IIa, theorie (= 60% van de punten)

- *Beantwoord elke vraag op één van de dubbele geruite bladen. Schrijf op elk van die dubbele geruite bladen bovenaan uw naam en het Romeinse cijfer van de vraag. Stop de dubbele geruite bladen vanaf II in het dubbele geruite blad I. De ongeruite bladen dienen voor het klad en moeten niet ingediend worden, evenmin als het blad met de opgaven.*
- *De bewijzen moeten niet langer of explicieter zijn dan in de cursus, en alles wat er in de cursus aan voorafgaat mag zonder meer gebruikt worden. Staat er in de cursus 'analoog' of 'wegens de stelling van X', dan mag u dat ook zo schrijven.*
- *U mag geen rekenmachine gebruiken.*

Vraag I.

1. Formuleer (geen bewijs) de 'tweede hoofdstelling voor functies van één veranderlijke'.
2. Om gelijke gemengde afgeleiden van tweede orde te hebben moet de functie van een bijzondere soort, namelijk ..., zijn. Definieer ..., formuleer en bewijs daarna de stelling.

Vraag II.

1. Vul aan (geen bewijs): $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \ldots$
2. Vul aan: $\Delta_\lambda(x) = \ldots$
3. In de 'oneigenlijke singuliere integraal van Dirichlet' moet de functie van een bijzondere soort, namelijk ..., zijn. Definieer ..., formuleer en bewijs daarna de stelling.

Vraag III.

1. Formuleer (geen bewijs) de 'eerste hoofdstelling voor functies van één veranderlijke'.
2. Voor de 'eerste hoofdstelling voor lijnintegralen' moet het vectorveld van een bijzondere soort, namelijk ..., zijn. Definieer ..., formuleer en bewijs daarna de stelling.

Vraag IV.

1. Definieer
   (a) nulverzameling in $\mathbb{R}^2$.
   (b) open verzameling in $\mathbb{R}^2$.
   (c) open gebied in $\mathbb{R}^2$.
   (d) gesloten verzameling in $\mathbb{R}^2$.
2. Beantwoord met JA of NEEN (niets bijvoegen, uitleggen of bewijzen)
   (a) De afstand tussen twee nietledige deelverzamelingen van $\mathbb{R}^2$ is altijd eindig.
   (b) Elke nulverzameling in $\mathbb{R}^2$ is begrensd.
   (c) De ledige verzameling is compact.

EINDE VAN DE THEORIE

Tijd tot 11.00. OEFENINGEN OM 14.00

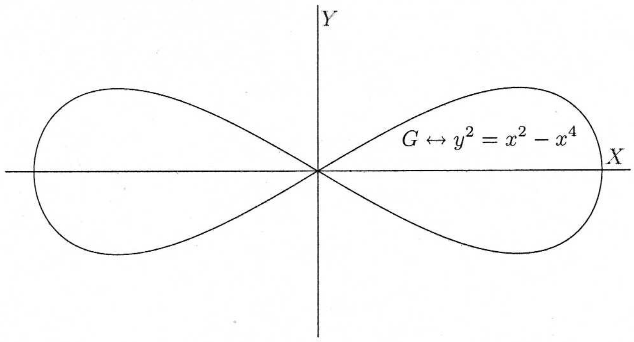
1ste Ba Fysica & Sterrenkunde
20.VI.08
Wiskundige Analyse II a, oefeningen
(theorie = 60% van de punten, oefeningen = 40% van de punten)

(i) *Schrijf elke vraag op een apart blad.*
(ii) *Becommentarieer uw werkwijze.*
(iii) *Het gebruik van een rekenmachine is niet toegelaten.*

Veel succes gewenst!

Vraag 1.

(1) Beschouw de kromme $G \leftrightarrow y^2 = x^2 - x^4$ (zie figuur).



Bepaal de vergelijking van G in poolcoördinaten (dus van de vorm $G \leftrightarrow r = f(\theta)$). Leid uit deze vergelijking af wat de grenzen voor θ zijn.

(2) Beschouw het gebied $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, beschreven door

$$\begin{cases} y^2 \leq x^2 - x^4 \\ z \leq 1 - x^2 - y^2 \\ |y| \geq \frac{\sqrt{3}}{3}|x| \\ z > 0 \\ x > 0. \end{cases}$$

Bereken, in de meest aangewezen coördinaten, $\iiint_\Omega \frac{z}{(1-x^2-y^2)^2}\, dxdydz$.

Vraag 2. Veronderstel $a > 0$. Het gebied $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ wordt beschreven door :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az \\ x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2 \\ z \leq \frac{\sqrt{3}}{2}a \end{cases}$$

Bereken, in de meest aangewezen coördinaten, $\iiint_\Omega \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, dxdydz$. (Vraagt een opsplitsing van de integraal.)

EINDE VAN DE OEFENINGEN

Tijd tot 16.30