Examen Formele Talen, Automaten en Complexiteit, groep C

23 juni 2008

Theorie

1. Neem
$$L = \{a^n b^{10} c^j d^k : k \leq 5, n \leq 3, j \geq 0\}.$$
We beweren dat L niet regulier is. We redeneren als volgt:
Stel dat L regulier is. Dan is L ook lineair. Zij m het pompend getal vervolgens het pompend lemma voor lineaire talen. Stel $w = a^3 b^{10} c^{3m} d^5$. Dan is $w \in L$. Stel $w = uvxyz$ met $| uvyz | \leq m$, $| vy | \geq 1$ en $vxy = c^l$ voor een $l \leq 3 \cdot m$ en stel dat $uv^i xy^i z \in L$ voor alle i. Dat kan niet en wij bereiken dus een tegenspraak met het pompend lemma voor lineaire talen.

   Bespreek de bewering en de redenering regel voor regel en haal alle foutieve redeneringen eruit.

2. Zij Σ een alfabet. Toon aan dat voor ieder taal $L \subseteq \Sigma^*$ precies één van de volgende gevallen optreedt (hierbij zij $\overline{L} := \Sigma^* \setminus L$):
   (a) L en $\overline{L}$ zijn beslisbaar.
   (b) L en $\overline{L}$ zijn niet recursief opsombaar.
   (c) L is recursief opsombaar maar niet beslisbaar en $\overline{L}$ is niet recursief opsombaar.
   (d) $\overline{L}$ is recursief opsombaar maar niet beslisbaar en L is niet recursief opsombaar.

3. Het probleem SUBSETSUM voor natuurlijke getallen is het volgend probleem:
Gegeven: Een eindige reeks $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{N}$ en een natuurlijke getal b.
Vraag: Bestaat er een keuze van een verzameling $I \subseteq \{1, \ldots, k\}$ met $\sum_{i \in I} a_i = b$?
Het probleem PARTITION voor natuurlijke getallen is het volgend probleem:
Gegeven: Een eindige reeks $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{N}$.
Vraag: Bestaat er een verzameling $J \subseteq \{1, \ldots, k\}$ met $\sum_{i \in J} a_i = \sum_{i \notin J} a_i$?

(a) Toon aan dat SUBSETSUM $\leq_p$ PARTITION.

(b) Toon aan dat PARTITION NP-volledig is, onder de aanname dat SUBSETSUM NP-volledig is en dat PARTITION $\in NP$.

(Hint voor de eerste tak: Stel $\langle a_1, \ldots, a_k, b \rangle$ is een gegeven SUBSETSUM probleem. Zij $M := \sum_{i=1}^{k} a_i$. Dan levert $\langle a_1, \ldots, a_k, M - b + 1, b + 1 \rangle$ een geschikte reductie tot het bijbehorend PARTITION probleem.)

Examen Formele Talen, Automaten en Complexiteit, groep D

23 juni 2008

Theorie

1. Neem
$$L = a^{2^n} : n \in \mathbb{N}.$$
   We beweren dat L niet context-vrij is. We redeneren als volgt:

   Zij m het pompend getal vervolgens het pompend lemma voor contextvrije talen. Stel $w = uvxyz = a^{2^{m+1}}$ met $|vxy| \leq m$ en $|vy| \geq 1$. Neem zonder verzwakking aan dat $\lambda = x, v = a, y = b, u = a^{2^m}$ en $z = a^{2^m}$. Dan geldt er voor alle i dat $uv^{2^i}xy^{2^i}z = a^{2^{m+i+2}} \in L$ in contradictie met het pompend lemma.

   Bespreek deze redenering regel voor regel en haal alle foutieve redeneringen eruit.

2. (a) *Bespreek de volgende bewering en haal alle foutieve redeneringen eruit.* Bewering: De recursief opsombare talen zijn onder complementen afgesloten. Bewijs: Zij $L = L(M)$. Verwissel nu eindtoestanden en niet-eindtoestanden in M en noem de nieuwe Turingmachine M'. Dan geldt $\Sigma^* \backslash L = L(M')$

   (b) Voor welke klassen van talen kan men het voorgaande bewijs in principe wel toepassen en voor welke niet? Het is genoeg in beide gevallen twee klassen aan te geven.

3. Het overdekkingsprobleem SETPARTITION voor verzamelingen is het volgende probleem:

   Gegeven: een eindige verzameling M, een reeks $T_1, \ldots, T_k \subseteq M$ en een natuurlijk getal $n \leq k$.

   Vraag: Bestaat er een keuze van n verschillende indices $i_1, \ldots, i_n \leq k$ met $M = T_{i_1} \cup \ldots \cup T_{i_n}$?

   (a) Toon aan dar 3SAT $\leq_p$ SETPARTITION

   (b) Toon aan dat SETPARTITION NP-volledig is, waarbij mag jij mag aannemen dat 3SAT NP-volledig is en dat SETPARTITION $\in NP$.

Hint voor de eerste tak: Stel $F = \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_m$ waarbij F m clausules heeft en n variabelen $x_1, \ldots, x_n$. Stel $M := \{1, 2, \ldots, m+n\}$. Stel

$$T_i := \{j : x_i \text{ treedt in clasule } \varphi_j \text{ op}\} \cup \{m+i\}$$

en

$$T_i' := \{j : \neg x_i \text{ treedt in clasule } \varphi_j \text{ op}\} \cup \{m+i\}.$$

Neem de reeks verzamelingen $T_1, T_1', \ldots, T_n, T_n' \subseteq M$. Toon aan dat F consistent is asa er $i_1, \ldots, i_n \leq k$ bestaat met $M = T_{i_1} \cup \ldots \cup T_{i_n}$.

Oefeningen

1. Construeer voor de volgende taal een edh:

$$L = \{a^n b^m : n \leq 4, m > 3\}$$

2. Geef voor de volgende taal met alfabet $\Sigma = \{a, b\}$ een regulieren uitdrukking r en bewijs dat die taal gelijk is aan $L(r)$:
   De taal van alle zinnen die beginnen met aba.

3. Geef voor de volgende taal een context-vrije grammatica:

$$L = \{a^n b^m : 0 \leq n \leq m \leq 2n\}$$

4. Plaats de volgende taal in de Chomsky Hiërarchie (figuur 11.3 in het boek). Bewijs uw bewering.

$$L = \{w \in \{a, b, c\}^* : n_a(w) = 3, n_b(w) = n_c(w)\}$$

5. Geef een Turing machine die de volgende functie berekent:

$$f(x) = \frac{1}{2}x(x+1)$$

Oefeningen

1. Construeer voor de volgende taal een edh:

$$L = \{a^n b^n : n \leq 6\}$$

2. Geef voor de volgende taal met alfabet $\Sigma = \{a, b\}$ een reguliere uitdrukking r en bewijs dat de taal gelijk is aan $L(r)$:
De taal van alle zinnen die niet eindigen met bab.

3. Geef voor de volgende taal een context-vrije grammatica:
De taal van alle toegestane productieregels van context-vrije grammaticas met $T = \{a, b\}$ en $V = \{A, B, C\}$

4. Plaats de volgende taal in de Chomsky hiërarchie (figuur 11.3 in het boek). Bewijs uw bewering.

$$L = \{w \in \{a, b, c\}^* : n_c(w) = 2, n_a(u) < n_b(u) \text{ voor iedere prefix } u \text{ van } w\ \}$$

5. Geef een Turing machine die de volgende functie berekent:

$$f(x, y) = \lfloor \frac{x + y}{2} \rfloor$$