Examen Differentiaalmeetkunde II (juni 2008)

I. (i) Noem q^i een stel lokale coördinaten op M en (q^i, v^i) overeenkomstige natuurlijke coördinaten op TM. Definieer een afbeelding $d_T : \mathcal{X}^*(M) \to \mathcal{X}^*(TM)$ via het voorschrift:

$$\alpha = \alpha_i(q)dq^i \quad \longmapsto \quad d_T\alpha = v^j \frac{\partial \alpha_i}{\partial q^j} dq^i + \alpha_i dv^i.$$

Toon aan dat dit wel degelijk een intrinsieke operator bepaalt.

(ii) Indien (q^i, p_i) natuurlijke bundelcoördinaten zijn op T^*M, definiëren we een $(1,1)$-tensorveld U op T^*M via het voorschrift:

$$U = \frac{\partial}{\partial p_i} \otimes dq^i.$$

Ga na of een dergelijke definitie betekenis heeft, m.a.w. of ze een intrinsiek object op T^*M bepaalt!

II. Zij P een $(1,1)$-tensorveld op TM dat binnen een natuurlijke kaart van de vorm is:

$$P = \left(\frac{\partial}{\partial q^i} + \xi_i^j(q,v) \frac{\partial}{\partial v^j} \right) \otimes dq^i,$$

voor zekere functies ξ_i^j op TM.

(i) Toon aan dat P volledig gekarakteriseerd is door de eigenschappen:

$$\forall X \in \mathcal{X}(M): \qquad P(X^v) = 0,$$
$$\forall \phi \in \mathcal{X}^*(M): \qquad P(\tau_M^*\phi) = \tau_M^*\phi.$$

(ii) Met P associëren we de operator $d_P : \mathcal{F}(TM) \to \mathcal{X}^*(TM)$, bepaald door

$$d_P F(X) = dF(P(X)), \quad \forall X \in \mathcal{X}(TM).$$

Geef de coördinaatuitdrukking van $d_P F$. Toon verder aan dat d_P een afleidingseigenschap heeft t.o.v. het product van functies.

(iii) We breiden de actie van d_P verder uit naar $\Lambda(TM)$ door op te leggen dat d_P een afleidingsoperator van de graad 1 wordt, met de eigenschap: $d_P\, d = -d\, d_P$. Toon (zonder coördinaatberekeningen) aan dat voor een 1-vorm α van de vorm $\alpha = FdG$, $F, G \in \mathcal{F}(TM)$ geldt:

$$d_P\alpha(X,Y) = d\alpha(P(X),Y) + d\alpha(X,P(Y)) - d(P(\alpha))(X,Y).$$

III. (i) Zij ∇ een connectie op M met torsie T. Toon aan dat voor een willekeurige 1-vorm α geldt:

$$\langle T(X,Y), \alpha \rangle = d\alpha(X,Y) + \langle X, \nabla_Y \alpha \rangle - \langle Y, \nabla_X \alpha \rangle.$$

(ii) Toon aan dat twee lineaire connecties ∇ en $\hat{\nabla}$ op M een $(1,2)$-tensorveld D bepalen. Toon ook aan dat omgekeerd, als D een $(1,2)$-tensorveld is en ∇ een lineaire connectie, de relatie $\hat{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + D(X,Y)$ een tweede connectie definieert.

(iii) Maak van de zojuist bewezen eigenschap gebruik om bij gegeven (niet-symmetrische) connectie ∇, een geschikte tensor D te kiezen, zodanig dat de nieuwe connectie $\hat{\nabla}$ torsievrij wordt.