Examen Kwantummechanica I: 14 januari 2008

THEORIE

Antwoord bondig en gevat !

1. VRAAG 1 (10 PUNTEN)

   - Leg in maximaal 20 lijnen (een tekening geldt voor één lijn) het verschil uit tussen gebonden toestanden en verstrooiingstoestanden. Specifieer daarbij (je kunt je beperken tot het ééndimensionale geval) welke condities voor de energie en potentiële energie moeten gelden.
   - Start van de meest algemene vorm van het onzekerheidsbeginsel van Heisenberg
     $$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} \left| \langle [A, B] \rangle \right|$$
     om op een KWALITATIEVE MANIER de grondtoestandsenergie van het waterstofatoom af te leiden. Welke grondtoestandsenergie zou je verwachten binnen de context van de klassieke fysica?
   - Definieer een Hermitische operator en bewijs dat het reële eigenwaarden bezit.

2. VRAAG 2 (20 PUNTEN) *MONDELING EXAMEN*

Examen Kwantummechanica I: 14 januari 2008

OEFENINGEN

Bij het oplossen van het oefeningengedeelte mogen ENKEL de cursusnota's (TRANSPARANTEN) en het handboek "Quantum Mechanics" van Bransden en Joachain gebruikt worden.

Oefening 1 (10 punten)

Een deeltje beweegt in een potentiaal gegeven door:

$$V(x) = \begin{cases} 0 \; , & -a \leq x \leq a \\ +\infty \; , & \mid x \mid > a \; , \end{cases}$$

en wordt op het tijdstip $t = 0$ in een toestand gebracht die beschreven wordt door de volgende golffunctie:

$$\Psi(x, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\psi_{E_1}(x) + B\psi_{E_2}(x) \right) \; ,$$

waarbij $\psi_{E_1}(x)$ de golffunctie is horend bij de grondtoestand en $\psi_{E_2}(x)$ de golffunctie bij de eerste aangeslagen toestand.

1. Bepaal de constante B zodanig dat $\Psi(x, t = 0)$ op één genormeerd is.

2. Bepaal de golffunctie $\Psi(x, t)$ van het deeltje op een arbitrair tijdstip t. Kan $\Psi(x, t)$ een *stationaire toestand* genoemd worden? Verklaar je antwoord. Hoe is de golffunctie $\Psi(x, t)$ genormeerd op een arbitrair tijdstip t?

3. Noem $P_+(t)$ de probabiliteit dat het deeltje zich op tijdstip t in het interval $0 \leq x \leq a$ bevindt. Analoog, $P_-(t)$ is de probabiliteit dat het deeltje zich op tijdstip t in het interval $-a \leq x \leq 0$ bevindt. Bereken $P_+(t)$ en $P_-(t)$.

4. Bereken
$$\frac{dP_+(t)}{dt} \quad \text{en,} \quad \frac{dP_-(t)}{dt} \; ,$$
en bespreek je resultaat.

5. Toon aan dat
$$\frac{dP_-(t)}{dt} + j(x = 0, t) = 0 \; ,$$
waarbij $j(x, t)$ de waarschijnlijkheidsstroomdichtheid is. Wat is de fysische betekenis van de bovenstaande relatie tussen de tijdsafhankelijkheid van $P_-(t)$ en $j(x = 0, t)$?

6. Kun je louter op basis van fysische argumenten een verband leggen tussen $j(x = 0, t)$ en de afgeleide naar de tijd van $P_+(t)$?

OEFENING 2 (10 PUNTEN)

Beschouw de ééndimensionale harmonische oscillator

$$H = \frac{{p_x}^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 \ .$$

De energie-eigenwaarden worden gegeven door E_n en de corresponderende op één genormeerde eigenfuncties door $\psi_n(x)$. Verder introduceren we

$$\Psi_n(x,t) = \psi_n(x) \exp -\frac{i}{\hbar} E_n t \ .$$

Beschouw nu de particuliere superpositie $\Psi(x,t)$ van twee eigenfuncties waarvoor het kwantumgetal n met 1 verschilt, dit wil zeggen:

$$\Psi(x,t) = b_n \Psi_n(x,t) + b_{n\pm1} \Psi_{n\pm1}(x,t) \ ,$$

met b_n en $b_{n\pm1}$ twee complexe getallen waarvoor

$$\mid b_n \mid^2 + \mid b_{n\pm1} \mid^2 = \ 1 \quad .$$

1. Wat is de verwachtingswaarde van de energie $< E >$ voor een systeem dat zich in de toestand $\Psi(x,t)$ bevindt?

2. Toon aan dat voor een systeem dat zich in de toestand $\Psi(x,t)$ bevindt, de verwachtingswaarde van de positie gegeven wordt door een uitdrukking van het type
$$\langle x \rangle = A \cos{(\omega t + \alpha)}$$
Bepaal A, ω en α. In hoeverre is deze uitdrukking voor de verwachtingswaarde van de positie verschillend van de voorspelling binnen de context van de klassieke mechanica?

3. Bereken voor de toestand $\Psi(x,t)$ ook de verwachtingswaarde $\langle p_x \rangle$ op een arbitrair tijdstip t.

4. Toon EXPLICIET aan dat het systeem in kwestie voldoet aan het theorema van Ehrenfest
$$\frac{d \langle x \rangle}{dt} = \frac{\langle p_x \rangle}{m} \quad \text{en,} \quad \frac{d \langle p_x \rangle}{dt} = - \left\langle \frac{dV}{dx} \right\rangle \ .$$