EXAMEN
KWANTUMMECHANICA
Academiejaar 2007-2008

1 Theorie

1. Tijdsafhankelijke perturbatietheorie:
   - Leid de Schrodingervergelijking af in het interactiebeeld.
   - Los die formeel op. (Dyson-perturbatiereeks)

2. Leid de Schrodingervergelijking af voor een deeltje in een electromagnetische potentiaal. Gegeven: de Lorentzkracht

$$\mathbf{F} = e\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right),$$

de Euler -Lagrange vergelijkingen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0,$$

het verband tussen Hamiltoniaan en Lagrangiaan

$$H = \sum_i \dot{x}_i p_i - L$$

en

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Bespreek de ijkinvariantie

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow e^{\frac{ie}{\hbar c}\chi}\psi \\ \mathbf{A} &\rightarrow \mathbf{A} + \nabla\chi \\ V &\rightarrow V - \frac{1}{c}\partial_t\chi \end{aligned}$$

2 Oefeningen

3. Twee spin-$\frac{1}{2}$ zijn onderworpen aan volgende hamiltoniaan:

$$\hat{H} = \left(\vec{S}_1 + \vec{S}_2\right)^2 - \mu\vec{B} \cdot \left(\vec{S}_1 + \vec{S}_2\right) \; met \; \vec{B} = B\vec{e}_x$$

De deeltjes zijn in respectievelijke begintoestanden:

$$|\psi_1\rangle = |S_z = \frac{\hbar}{2}\rangle \qquad |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|S_z = \frac{\hbar}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|S_z = -\frac{\hbar}{2}\rangle$$

(a) Bepaal een (oordeelkundige) basis van dit eindig-dimensioneel systeem en de matrix-elementen van de Hamiltoniaan.

(b) Bereken de tijdsevolutie van de 2-deeltjes golffunctie $|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$

4. Een waterstofatoom wordt in een electromagnetisch veld geplaatst: $\vec{B} = B\vec{e}_z$ en $\vec{E} = E\vec{e}_x$ en heeft Hamiltoniaan:

$$\hat{H}_0 + \frac{e}{2M}\vec{L}\cdot\vec{B} + e\vec{r}\cdot\vec{E}$$

met $\hat{H}_0$ de hamiltoniaan van het gewone ongestoorde waterstofatoom.

(a) Bereken de verwachtingswaarde van de energie van de (niet noodzakelijk genormeerde) toestand $|\psi\rangle$

$$\langle r|\psi\rangle = \sqrt{\frac{1}{8\pi}}\left(\cos(\varphi)\sin(\theta)\frac{r}{a^{5/2}}e^{-r/2a} + \frac{2}{a^{3/2}}e^{-r/a}\right)$$

(b) Gegeven dat $\langle l\ldots|\vec{r}\cdot\vec{E}|l'\ldots\rangle \neq 0 \Rightarrow l \neq l'$, bereken de eerste orde correctie(s) op het ongestoorde energieniveau E_2

Hint: **een of meer van onderstaande integralen kan van pas komen:**

- $\int_0^{\infty} r^n e^{-r} dr = \Gamma(n+1) = n!$
- $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-r^2+br} dr = \sqrt{\pi}e^{\frac{b^2}{4}}$
- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}\theta d\theta = \frac{(n)!!}{(n+1)!!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n \bmod 2}$