Relativistische kwantumveldentheorie en elementaire deeltjesfysica: examen 29 januari 2008 (8u30- 12u30)

De theorie is uiteraard gesloten boek. Wie de theorie heeft afgegeven mag de cursus gebruiken om de oefeningen op te lossen, evenwel zonder opgeloste oefeningen of opgaven ervan. De extra pagina's over Comptonverstrooiing mag u evenmin gebruiken. Neem de nummering in de opgave over op je antwoordenblad. Vergeet niet om het mondelinge gedeelte (zonder voorbereiding) af te leggen. Succes!

1 Theorie

1. Bespreek spontane breking van globale U(1)-symmetrie. Gegeven is de Lagrangiaan

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - \mu^2 \phi\phi^* - \lambda(\phi\phi^*)^2 \tag{1}$$

Breid dit uit tot een willekeurige groep $G \to H$. Bespreek tenslotte spontane symmetriebreking van locale U(1)-symmetrie met

$\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}^\mu$

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - \mu^2 \phi\phi^* - \lambda(\phi\phi^*)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{2}$$

2. Leid de Feynmanse padintegraal af van een systeem met Hamiltoniaan

$$\mathcal{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) \tag{3}$$

Gegeven is de integraal

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ay^2+by}\mathrm{d}y = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{b^2}{4a}} \tag{4}$$

2 Oefeningen

We bestuderen comptonverstrooiing ($e^-\gamma \to e^-\gamma$) in het chirale geval, d.w.z. met Lagrangiaan

$$\mathcal{L} = i\overline{\psi}\partial\!\!\!/\psi - m_k\overline{\psi}\psi + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + ig\overline{\psi}\gamma_5\psi\phi \tag{5}$$

Ken aan het inkomende elektron viermomentum p toe, spin s en massa m. Geef het foton momentum k en frequentie ω. Gebruik dezelfde notatie maar met accent voor de uitgaande deeltjes.

1. Welk type deeltjes zijn de optredende fotonen (massa, aantal polarisatievrijheidsgraden)? Geef de gewijzigde Feynmanregels voor a) de vertex en b) in- en uitgaande fotonen.
2. Teken de relevante Feynmandiagrammen voor dit proces in laagste orde.
3. Schrijf het matrixelement $i\mathcal{M}$ neer.
4. Vereenvoudig de teller door gebruik te maken van de (anti)commutatie-eigenschap van de γ^5-matrix, de betrekking $(\gamma^5)^2 = 1$ en de Diracvergelijking. Werk de propagator in de noemer uit, zodat er enkel een Minkowski-product in optreedt.
5. Werk nu de ongepolariseerde verstrooiingsamplitude $\frac{1}{2}\sum_{s,s'}|\mathcal{M}|^2$ uit. Waarom staat er geen factor 1/4 zoals bij elektron-muon scattering of het QED comptoneffect?

↳ 2 polarisatie vrijh. gr.!

6. Ga over naar het stelsel waar het elektron initieel in rust is en het foton invalt langs de Z-as met energie ω. Het verstrooide foton maakt een hoek θ met de Z-as en heeft energie ω'. Leid Compton's formule af voor golflengteverschuiving. (Dit is een relatie tussen ω, ω', m en θ.)
7. Bereken $\frac{1}{2}\sum_{s,s'}|\mathcal{M}|^2$ in dit stelsel.
8. Voeg het resultaat in in volgende formule voor de werkzame doorsnede

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = (2\pi)^5\,\frac{\omega'^3}{\omega}\,\frac{1}{2}\sum_{s,s'}|\mathcal{M}|^2 \tag{6}$$

en bespreek.
Vergelijk hierbij het resultaat met de ongepolariseerde Klein-Nishina werkzame doorsnede voor Q.E.D.:

$$\frac{d\sigma_{K.N.}}{d\cos\theta} = \frac{\pi\alpha^2}{m^2}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2\left[\frac{\omega'}{\omega}+\frac{\omega}{\omega'}-\sin^2\theta\right] \tag{7}$$

9. In de laag-energetische limiet ($\omega \to 0$, $\frac{\omega'}{\omega} \to 1$) komt het proces neer op verstrooing van een klassieke elektromagnetische golf aan een vrij elektron. Hiervoor is de totale (hoekgeïntegreerde) werkzame doorsnede gegeven door de Thomson-doorsnede

$$\sigma_{Thomson} = \frac{8\pi\alpha^2}{3m^2} \tag{8}$$

Herleidt je resultaat voor de chirale interactie zich in deze limiet ook tot de $\sigma_{Thomson}$ zoals het geval is voor $\sigma_{K.N.}$?

Appendix: Nuttige formules

$$\begin{aligned}
Tr(\text{oneven}\#\gamma) &= 0 && (9)\\
Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu) &= 4g^{\mu\nu} && (10)\\
Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) &= 4(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) && (11)\\
(\gamma^5)^2 &= \mathbb{1} && (12)\\
\alpha &= \frac{e^2}{4\pi} && (13)
\end{aligned}$$