Examen Wiskundige Optimalisatie

Academiejaar 2007-2008, donderdag 12 juni 2008, 9u00

Theorie

- Schets de context van de toegevoegde gradiëntenmethode: in welke situatie wordt ze aangewend, hoe verhoudt ze zich tot de zuivere Newton-methode, wat is haar wiskundige achtergrond? Leg uit in welk opzicht het toegevoegde gradiëntenalgoritme een specifieke toegevoegde gradiëntenmethode is. Bespreek de varianten van het toegevoegde gradiëntenalgoritme voor niet-kwadratische problemen.

Oefeningen

1. Beschouw de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ functie
$$f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2 .$$
   (a) Bepaal de kritische punten.
   (b) Ga na welke van deze kritische punten strikt lokale minimizers zijn.
   (c) Bevat f globale minimizers over $\mathbb{R}^2$? Zo ja, welke.
   (d) Is f convex op het convexe gebied Ω gedefinieerd door
$$\Omega = \{(x,y) \mid x \geq 0, |y| \leq 2x\}?$$

2. Een bedrijf produceert stoelen en banken. Er zijn 5 werkuren en 25 euro materiaal nodig om een stoel te maken, een bank vergt 4 werkuren en 40 euro materiaal. Per stoel maakt het bedrijf 10 euro en per bank 12 euro winst. Het bedrijf heeft 2000 euro materiaal in voorraad en kan 320 werkuren ter beschikking stellen voor deze productie. Hoeveel stoelen en banken moet het bedrijf produceren om de winst te maximaliseren?
   (a) Formuleer het vraagstuk als een probleem van lineaire programmatie.
   (b) Breng dit probleem in de standaardvorm.
   (c) Los op met de simplexmethode.
   (d) Los het vraagstuk ook grafisch op.
   (e) Formuleer het duale probleem en breng dit in standaardvorm.

3. Bepaal $\max(px + qy)$, waarbij $p > 0$ en $q > 1$ strikt positieve constanten zijn, onder de voorwaarden
$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \,, \\ x \geq 0 \,, \\ y \geq 0 \,. \end{cases}$$

EXAMEN WISKUNDIGE OPTIMALISATIE

Academiejaar 2007-2008, donderdag 19 juni 2008, 9u00

Theorie

- Geef de algemene vorm van gradiëntmethodes en leidt hieruit enkele particuliere methodes af. Wat is de wiskundige achtergrond van deze methodes. Bespreek de convergentie van deze methodes voor kwadratische problemen. Hoe verhouden deze methodes zich tot de zuivere Newton-methode.

Oefeningen

1. Beschouw de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ functie
$$f(x,y) = xy(a-x-y)\,,$$
waarbij a een reële constante voorstelt.
   (a) Bepaal de kritische punten.
   (b) Ga na welke van deze kritische punten strikt lokale minimizers zijn.
   (c) Bevat f globale minimizers over $\mathbb{R}^2$? Zo ja, welke.
   (d) Is f convex op het convexe gebied Ω gedefinieerd door
$$\Omega = \{(x,y) \mid x \leq 0, y \leq 0, 4(x+y) \leq a\}\,.$$

2. Voor het onderhoud van een tuin moeten ten minste 10, 12 en 12 eenheden van de nutritieve componenten a, b en g toegediend worden. Een kan vloeibare meststof bevat 5, 2 en 1 eenheden van a, b en g, respectievelijk. Een zak mestkorrels bevat 1, 2 en 4 eenheden van de componenten a, b en g, respectievelijk. Een kan vloeibare meststof kost 15 euro, een zak mestkorrels 10 euro. Welke combinatie van kannen en zakken meststof moet de tuinier aankopen om de kost te minimalizeren?
   (a) Formuleer het vraagstuk als een probleem van lineaire programmatie.
   (b) Breng dit probleem in de standaardvorm.
   (c) Los het probleem grafisch op.
   (d) Formuleer het duale probleem en breng dit in standaardvorm.
   (e) Los het duale probleem op met de simplexmethode.

3. Bepaal
$$\max\left[\sqrt{x} + \sqrt{x}\,y^{1/3} - x - y\right]\,,$$
onder de voorwaarden
$$\begin{cases} x \geq 0\,, \\ y \geq 0\,. \end{cases}$$