Herexamen Formele Talen, Automaten en Complexiteit

1 september 2008

Theorie

1. Stel dat

   $$L = \{w_1 c^i w_2 \in \{a,b,c\} : i \in \mathbb{N} \wedge w_1, w_2 \in \{a,b\}^* \wedge w_1 \neq w_2\}$$

   We beweren dat L niet regulier maar contextvrij is. We redeneren als volgt:

   Stel dat L regulier is. Dan bestaat met het pompend lemma voor reguliere talen het pompend getal m voor L.

   Kies nu: $w = a^{2m}b^{2m}ca^m b^{2m}$. Dan is w goed gekozen voor de toepassing van het pompend lemma. Stel dat $w = xyz$ met $|xy| \leq m$ waarbij $x = a^{2m}b^{2m}c$, $y = a^m$ en $z = b^{2m}$ en $xy^iz \in L$ voor alle $i \in \mathbb{N}$. Kies nu $i = 2$ dan is $xy^iz \notin L$. Tegenspraak.

   Om aan te tonen dat L contextvrij is kunnen we met een pushdownautomaat werken.

   Bespreek de bewering is de redenering regel voor regel. Verklaar welke redeneringen juist zijn en welke onjuist zijn. Geef aan (met een volledig bewijs) of L wel regulier is of niet. Geef aan (met een informele verklaring) of L wel contextvrij is of niet. (4 punten)

2. Toon aan met een reductie tot het halting probleem dat het volgend probleem niet algoritmisch beslisbaar is: Gegeven een Turingmachine M, test of M voor precies twee verschillende inputs w stopt. (3 punten)

3. Het INEQUIVALENT probleem is het volgende probleem: Input: Twee reguliere expressies r_1, r_2. Output: Ja, indien $L(r_1) \neq L(r_2)$ en neen anders.

   Toon aan dat het INEQUIVALENT NP-hard is. (Hint: Toon bijvoorbeeld aan dat 3SAT reduceerbaar is op INEQUIVALENT. Stel daarvoor dat $F = K_1 \wedge \ldots \wedge K_m$ een formule in conjunctieve normaalvorm is en dat in F de variabelen $x_1, \ldots, x_n$ optreden zo dat in iedere K_i geen variabele dubbel optreedt. Als alfabet kiezen we nu {0,1} en we construeren twee reguliere uitdrukkingen α, β over dit alfabet als volgt: $\alpha := \alpha_1 + \ldots + \alpha_m$ waarbij $\alpha_i := \gamma_{i,1} \ldots \gamma_{i,n}$ met

$$\gamma_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{indien } x_j \text{ in } K_i \text{ optreedt,} \\ 1 & \text{indien } \neg x_j \text{ in } K_i \text{ optreedt,} \\ (0+1) & \text{anders} \end{cases}$$

Toon aan dat een bedeling $(a_1, \ldots, a_n)$ van waarheidswaarden a_l voor de variabelen x_l de clausula K_i niet waar maakt als en slechts als de string $a_i \ldots a_n$ element van $L(\alpha_i)$ is. Toon aan dat F consistent is als en slechts als $L(\alpha) \neq \{0,1\}^n$. Kies β met $L(\beta) = \{0,1\}^n$. Dan levert $F \to (\alpha, \beta)$ een gewenste reductie op. (3 punten)

Oefeningen

1. Construeer voor de volgende taal een edh:

$$L = \{a^n b^m : n \in \mathbb{N}, n = 2m \text{ als } n < 7, m \geq 3 \text{ als } n \geq 7\}$$

2. Geef voor de volgende taal met alfabet $\Sigma = \{a, b, c, d\}$ een reguliere uitdrukking r en bewijs dat de taal gelijk is aan $L(r)$:
De taal van alle zinnen die deelstring *adca* bevatten.

3. Geef voor de volgende taal een context-gevoelige grammatica:

$$L = \{a^{2n} b^n c^{3n} : n \geq 1\}$$

4. Plaats de volgende taal in de Chomsky hirarchie (figuur 11.3 in het boek). Bewijs uw redenering.

$$L = \{w^R a^n b^n w : n \in \mathbb{N}, w \in \{a, b\}^*\}$$

5. Geef een Turing machine die de volgende functie berekent:

$$f(n) = \lfloor x/3 \rfloor$$