Examen "Kwantummechanica 1": 12 januari 2009

THEORIE

Antwoord bondig en gevat !

1. VRAAG 1 (10 PUNTEN)

   - Een deeltje wordt gebonden in een één-dimensionale potentiaal $V(x)$ die de volgende eigenschap bezit $V(x) = V(-x)$. Noem $\psi_n(x)$ een oplossing van de corresponderende TISE met energie-eigenwaarde E_n.

     (a) toon aan dat ook $\psi_n(-x)$ een oplossing is van de TISE

     (b) gebruik dit resultaat om aan te tonen dat geldt

     $$\psi_n(x) = \psi_n(-x) \qquad \text{OF,} \qquad \psi_n(x) = -\psi_n(-x)$$

     (c) definieer het concept "pariteit" en breng het in relatie met wat je hierboven bekomen hebt

     (d) Leid een uitdrukking af die de meest algemene oplossing $\Psi(x,t)$ van de TDSE in verband brengt met de $\psi_n(x)$.

     (e) Beschouw een deeltje met golffunctie $\Psi(x,t)$ dat beweegt in een potentiaal $V(x) = V(-x)$. Zijn de volgende gelijkheden altijd geldig?

       i. $\langle x \rangle = 0$

       ii. $\langle p_x \rangle = 0$

       Bewijs je antwoord.

   - Veronderstel dat de operatoren P en Q aan de volgende eigenschap voldoen

     $$[P, Q] = Q \; ,$$

     en dat ψ een eigenfunctie is van P met eigenwaarde p. Toon aan dat $Q\psi$ een eigenfunctie is van P en bepaal de corresponderende eigenwaarde.

2. VRAAG 2 (20 PUNTEN) *MONDELING EXAMEN*

Examen "Kwantummechanica 1": 12 januari 2009

OEFENINGEN

BIJ HET OPLOSSEN VAN HET OEFENINGENGEDEELTE MOGEN ENKEL DE CURSUSNOTA'S (TRANSPARANTEN) EN HET HANDBOEK "QUANTUM MECHANICS" VAN BRANSDEN EN JOACHAIN GEBRUIKT WORDEN.

OEFENING 1 (10 PUNTEN)

Een deeltje beweegt in een potentiaal gegeven door:

$$V(x) = \begin{cases} 0\,, & 0 \leq x \leq a \\ +\infty\,, & x < 0 \quad \text{EN,} \quad x > a\,, \end{cases}$$

en wordt op het tijdstip $t = 0$ in een toestand gebracht die beschreven wordt door de volgende golffunctie:

$$\Psi(x, t = 0) = \left(B\psi_{E_2}(x) + \frac{1}{\sqrt{3}}\psi_{E_3}(x) \right) \ ,$$

waarbij $\psi_{E_2}(x)$ de golffunctie is horend bij de eerste aangeslagen toestand en $\psi_{E_3}(x)$ de golffunctie bij de tweede aangeslagen toestand.

1. Bepaal de constante B zodanig dat $\Psi(x, t = 0)$ op één genormeerd is.

2. Bepaal de golffunctie $\Psi(x, t)$ van het deeltje op een arbitrair tijdstip t. Kan $\Psi(x, t)$ een *stationaire toestand* genoemd worden? Verklaar je antwoord. Hoe is de golffunctie $\Psi(x, t)$ genormeerd op een arbitrair tijdstip t?

3. Bereken de verwachtingwaarde voor de energie $\langle E \rangle$ van het deeltje waarvoor de golffunctie gegeven wordt door $\Psi(x, t)$. Kan $\Psi(x, t)$ een *stationaire toestand* genoemd worden? Verklaar je antwoord. Hoe is de golffunctie $\Psi(x, t)$ genormeerd op een arbitrair tijdstip t?

4. Bereken de verwachtingswaarde voor de positie van het deeltje $\langle x \rangle$ op een arbitrair tijdstip t.

5. Stel dat we op een tijdstip t een meting uitvoeren die de positie van het deeltje bepaalt. Wat is de meest waarschijnlijke waarde voor de positie van het deeltje dat we zullen vinden op tijdstip t?

OEFENING 2 (10 PUNTEN)

Beschouw de linear harmonische oscillator in één dimensie. De energie-eigenfuncties worden gegeven door $|E_n\rangle$.

- Bewijs de volgende gelijkheid voor een systeem dat zich in een toestand $|E_n\rangle$ bevindt:

$$\Delta x \, \Delta p_x = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \, .$$

- Beschouw nu de genormeerde eigenfuncties $|\alpha\rangle$ van de operator a_-

$$a_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x + i \frac{p_x}{\sqrt{m\hbar\omega}} \right] \, .$$

  Dit betekent dat

$$a_- \, |\alpha\rangle = \alpha \, |\alpha\rangle$$

  met α **een complex getal**.

  1. bereken $\langle x^2 \rangle$, $\langle x \rangle$, $\langle p_x \rangle$ en $\langle p_x^2 \rangle$ voor de toestand $|\alpha\rangle$ (*TIP: herinner dat* $a_+ = a_-^\dagger$)
  2. Toon aan dat voor de toestanden $|\alpha\rangle$ het merkwaardige resultaat geldt dat

$$\Delta x \, \Delta p_x = \frac{\hbar}{2} \, .$$