Examen Analyse 2 : Theorie. (15 januari 2009)

1. Integralen.

a. Geef de definitie van de oneigenlijke integraal van een continue functie f over een interval $]\alpha, \beta[$ waarbij $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $\beta \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $\alpha < \beta$. Als toepassing hierop, bespreek het geval waarbij $\alpha = 0$, $\beta = +\infty$ en de functie van de vorm $f(x) = x^p$ is voor $p \in \mathbb{R}$.

b. Geef primitieven van de volgende functies:

1. 2^x
2. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(x \in]-1, +1[)$
3. $\mathrm{ch}\, x$ waarbij $x \in \mathbb{R}$.
4. $\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$ waarbij $x \in \mathbb{R}$.
5. $\frac{1}{1+x^2}$ waarbij $x \in \mathbb{R}$.

2. Rijen en reeksen van reële functies.

Geef en bewijs de Maclaurinontwikkeling van de logaritmische functie gedefinieerd door $f(x) = \ln(1+x)$. Geef expliciet de convergentiestraal en het convergentieïnterval.

3. Gewone differentiaalvergelijkingen.

Bewijs de volgende stelling: Stel Φ_1 en Φ_2 twee oplossingen over een interval I van de DV

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0.$$

Als: $(\forall i \in \{0,1,2\})(a_i \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}))$,
En: $(\forall x \in I)(a_0(x) \neq 0)$,
Dan: $(\forall x \in I)(W(\Phi_1, \Phi_2)(x) \neq 0) \vee (\forall x \in I)(W(\Phi_1, \Phi_2)(x) = 0)$

4. Partiële differentiaalvergelijkingen.

Beschouw de eendimensionale golfvergelijking:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \tag{1}$$

Geef met bewijs de algemene vorm van de oplossingen van deze vergelijking die van het type "reizende golf" zijn. Als toepassing, beschrijf de tijdsevolutie van een oneindige snaar die op het ogenblik $t = 0$ met het profiel

$$\phi(x) = \frac{1}{1+8x^2}$$

uit een beweginglioze toestand losgelaten wordt.

Gent, 15 januari 2009

Prof. W. Govaerts

Examen Analyse 2 : Oefeningen. (15 januari 2009) Reeks 2.

Noot : Bij dit examen is het gebruik van Maple toegelaten maar het is geen examen over Maple! Probeer de door Maple gegeven uitkomsten altijd zoveel mogelijk te vereenvoudigen.

1. Fourierreeksen

Beschouw de functie f die bepaald is door

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x+4, && \forall x \in [-2,-1] \\ &= -2x, && \forall x \in]-1,0[\\ &= 0 && \forall x \in [0,2[\end{aligned}$$

a. Geef de bijbehorende Fourierreeks met hoofdperiode 4.
b. Geef afzonderlijk de even en de oneven coefficienten van de reeksontwikkeling.
c. Convergeert de reeksontwikkeling tot de functie f in elk punt van $[0,2]$? Geef de reden waarom of waarom niet.

2. Meervoudige integralen.

Bereken de drievoudige integraal:

$$\int\int\int_V xy^2 z dx dy dz,$$

over het gebied V in de (x,y,z) - ruimte gegeven als:

$$V = \{(x,y,z) |\ y^2 \leq x,\ 0 \leq z \leq 1 - x^4\}.$$

3. Differentiaalvergelijkingen.

Bereken de differentiaalvergelijking van de schaar krommen die bestaat uit alle cirkels in het vlak met straal 2.

4. Differentiaalvergelijkingen.

Beschouw de differentiaalvergelijking (DV)

$$y^{(3)} - 3y'' - 4y' + 12y = 0.$$

a. Geef de karakteristieke vergelijking (KV) van deze DV.
b. Wat zijn de wortels van de KV?
c. Wat is de algemene oplossing van de DV?
d. Welke oplossing van de DV voldoet aan $y^{(2)}(1) = 2, y'(1) = 0, y(1) = 0$?

Gent, 15 januari 2009

Prof. W. Govaerts