Examen Wiskundige Logica

Master Wiskunde - UGent

Eerste examenperiode 2008-2009
Examen A

Kies vijf van de zes opgaven. Hierbij zijn opgave 1 en 2 echter verplicht om te doen. Daarover gaat ook het mondeling. Per opgave zijn 4 punten en dus maximaal 20 punten te behalen.

Oefening 1. Zij LO de theorie van lineaire ordeningen. Zij T een theorie, die tenminste het symbool $<$ in haar taal bevat en voor die $T \models LO$ geldt. Stel T heeft een oneindig model. Toon aan dat er een model $\mathfrak{M}$ van T bestaat waarin men de rationale getallen ordeningbewarend kan inbedden. Concludeer dat de theorie van de gehele getallen $Th(\mathbb{Z}, <)$ een model heeft waarin men de rationale getallen kan inbedden.

Oefening 2. Zij G een eindig voortgebrachte groep, i.e. $G = \langle g_1, ..., g_n \rangle$, $n \in \mathbb{N}$, en $H \subsetneq G$ een deelgroep van G. Dan bestaat er een deelgroep H' die maximaal is ten opzichte van de inclusie en waarvoor geldt

$$H \subseteq H' \subsetneq G.$$

Oefening 3. Zij $\mathcal{C} = \{C_i | i \in I\}$ en $\mathcal{D} = \{D_i | i \in I\}$ families van verzamelingen, zo dat $|C_i| < |D_i|$ voor elke $i \in I$. Toon aan dat dan geldt:

$$\sum_{i \in I} |C_i| < \prod_{i \in I} |D_i|.$$

(Merk op: de som van kardinaliteiten is gedefinieerd via disjuncte unie. Zonder bewijs mag U aannemen dat geldt:

$$\sum_{i \in I} |C_i| \leq \prod_{i \in I} |D_i|.)$$

Oefening 4. We zeggen dat een L-formule positief is als het bevat is in de kleinste collectie van L formules, die de atomaire formules bevat en die gesloten is onder $\wedge, \vee, \forall, \exists$. We zeggen dat $\eta : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ een L-homomorphisme is asa

1. $\eta(c^{\mathfrak{M}}) = c^{\mathfrak{N}}$,
2. $\eta(f^{\mathfrak{M}}(\vec{m})) = f^{\mathfrak{N}}(\eta(\vec{m}))$,
3. $\vec{m} \in R^{\mathfrak{M}} \Rightarrow \eta(\vec{m}) \in R^{\mathfrak{N}}$.

Hierbij zij $\eta(\vec{m}) := \eta(m_1), \ldots, \eta(m_n)$ als $\vec{m} = m_1, \ldots, m_n$.

Stel dat $\eta : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ is een surjectief L-homomorphisme is, dat $\vec{m} \in \mathfrak{M}$, dat $\varphi(\vec{x})$ L-positief is en dat $\mathfrak{M} \models \varphi(\vec{m})$. Toon aan dat $\mathfrak{N} \models \varphi(\eta(\vec{m}))$.

Oefening 5. Zij T een volledige theorie en $\varphi(\vec{x})$ een L-formule met $T \models \exists\vec{x}\varphi(\vec{x})$. Toon aan dat de volgende uitspraken equivalent zijn:

1. Er bestaat een positieve kwantorvrije formule $\psi(\vec{x})$ zodat
$$T \models \forall\vec{x}(\varphi(\vec{x}) \leftrightarrow \psi(\vec{x})).$$
2. Voor alle $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \models T$ en $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{M}$: Als $\eta : \mathfrak{A} \to \mathfrak{N}$ een L-homomorfisme is, $\vec{a} \in \mathfrak{A}$ en $\mathfrak{M} \models \varphi(\vec{a})$ dan geldt $\mathfrak{N} \models \varphi(\eta(\vec{a}))$.

Hint voor 2) $\Rightarrow$1). Zij $\Gamma(\vec{v}) := \{\psi(\vec{v}) : \psi$ is positief en kwantorvrij en $T \models \forall\vec{v}(\psi(\vec{v}) \to \varphi(\vec{v}))\}$. Zij $\Sigma := T + \{\neg\psi(\vec{c}) : \psi \in \Gamma\} \cup \{\varphi(\vec{c})\}$ waarbij $\vec{c}$ nieuwe constanten zijn. Toon aan dat Σ geen model heeft en dat daaruit de conclusie volgt. Neem voor het eerste doel aan, om een tegenspraak te bereiken, dat er een model $\mathfrak{M}$ met $\mathfrak{M} \models T$ en een $\vec{m} \in \mathfrak{M}$ bestaan zodat $\mathfrak{M} \models \varphi(\vec{m})$ en $\mathfrak{M} \models \neg\psi(\vec{m})$ voor alle $\psi \in \Gamma$. Zij dan

$$\Sigma' := T \cup \{\neg\varphi(\vec{c})\} \cup \{\theta(\vec{c}) : \mathfrak{M} \models \theta(\vec{m}) \text{ en } \theta(\vec{c}) \text{ positief en kwantorvrij}\}$$

waarbij $\vec{c}$ nieuwe constanten zijn. Toon aan dat Σ' een model $\mathfrak{N}$ heeft. Zij $\mathfrak{A}$ de substructuur van $\mathfrak{M}$ die door $\vec{m}$ wordt gegenereerd. Pas nu 2) toe om een contradictie te bereiken.

Oefening 6. Maak een bewijsboom voor de volgende implicatie. Doe dit in 'gedecoreerde' stijl, i.e. vermeld telkens welke regel ($\wedge I$, $\to E$, ...) je toepast. (Veronderstel dat y niet behoort tot de vrije variabelen van B.)

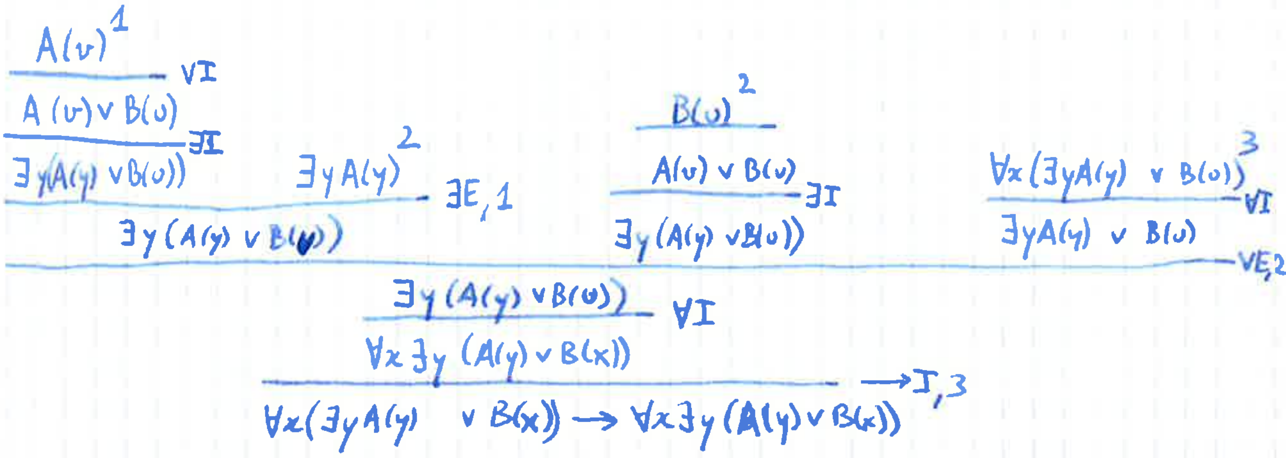
$$\vdash \forall x(\exists y A(y) \vee B(x)) \leftrightarrow \forall x \exists y(A(y) \vee B(x)).$$

Veel succes!

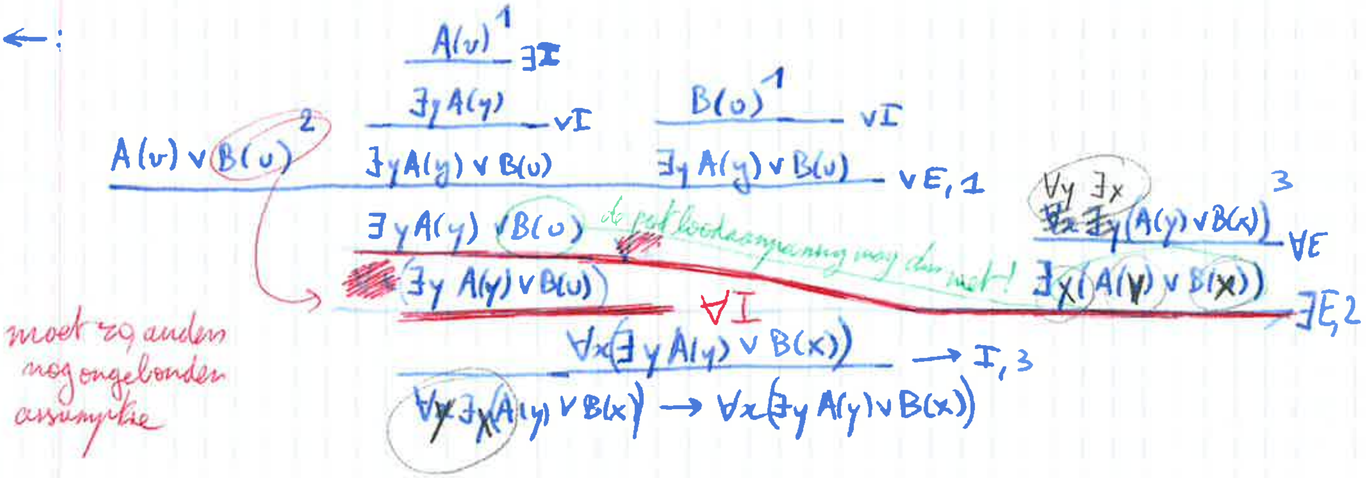
Bewijsboom examen A

↔ wil zeggen → en ←, we bewijzen dus beide bomen.

→:



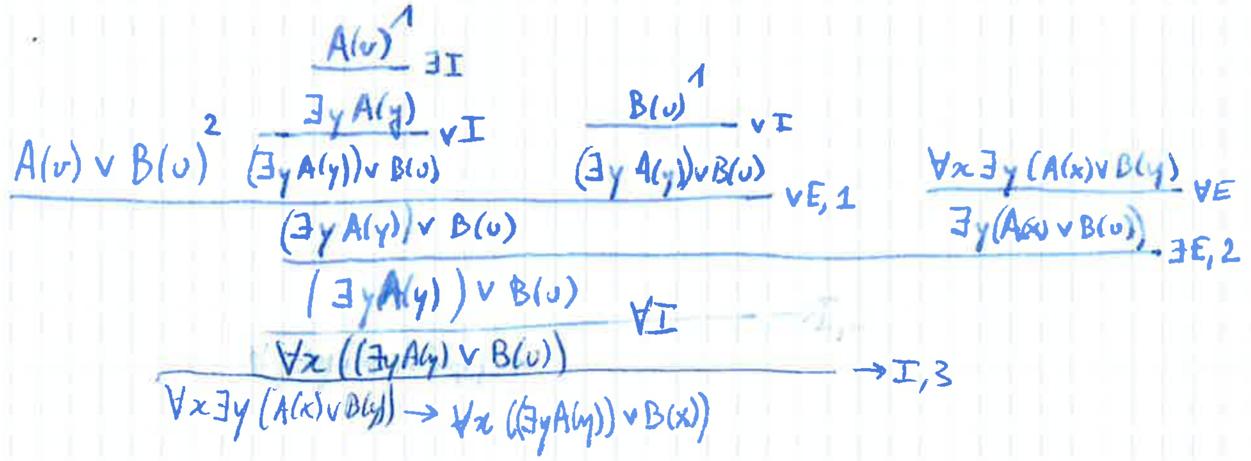
←:



zo krijgen we de verkeerde conclusie $\forall y \exists x (A(y) \vee B(x)) \to \forall x (\exists y A(y) \vee B(x))$ ...

Nu eens net:

←:



[illegible] 4
[illegible] 1

Lemma: $\forall$ L-termen met $FV \subseteq \{\vec{x}\}$ geldt: $\eta(t(m_1,\dots,m_n)^M) = t(\eta(m_1),\dots,\eta(m_n))^N$.

Bewijs: $*$ voor constanten: $\eta(c^M) = c^N = c(\eta())^N$.

$*$ voor variabelen: ???

$*$ voor functies $f^M(t_1,\dots,t_n)$: $\eta(f^M(t_1,\dots,t_n)) = f^N(\eta(t_1),\dots,\eta(t_n))$ gegeven.

Oefening oplossing

We bewijzen per inductie:

$*$ $\varphi(\vec{m})$ is $s(\vec{m}) = t(\vec{m})$, ~~dan $M \models \varphi(\vec{m}) \Rightarrow$~~ $M \models s(\vec{m}) = t(\vec{m})$

$$\Rightarrow s(\vec{m})^M = t(\vec{m})^M$$
$$\Rightarrow \eta(s(\vec{m})^M) = \eta(t(\vec{m})^M)$$
$$\Rightarrow s(\eta(\vec{m}))^N = t(\eta(\vec{m}))^N$$
$$\Rightarrow N \models s(\eta(\vec{m})) = t(\eta(\vec{m}))$$

$*$ $\varphi(\vec{m})$ is $R(t_1(\vec{m}),\dots,t_n(\vec{m}))$: $M \models R(t_1(\vec{m}),\dots,t_n(\vec{m}))$

$$\Rightarrow (t_1(\vec{m})^M,\dots,t_n(\vec{m})^M) \in R^M$$
$$\Rightarrow \eta(t_1(\vec{m})^M,\dots,t_n(\vec{m})^M) \in R^N$$
$$\Rightarrow (t_1(\eta(\vec{m}))^N,\dots,t_n(\eta(\vec{m}))^N) \in R^N$$
$$\Rightarrow N \models R(t_1(\eta(\vec{m})),\dots,t_n(\eta(\vec{m}))).$$

$*$ $\varphi(m)$ is $\perp$: $M \models \perp$ en $N \models \perp$ zijn vals, en (vals $\Rightarrow$ vals) is waar.

$*$ $\varphi(m)$ is $s(\vec{m}) \vee t(\vec{m})$: $M \models s(\vec{m}) \vee t(m) \Rightarrow M \models s(m) \vee M \models t(m)$

$$\Rightarrow N \models s(\eta(m)) \vee N \models t(\eta(m))$$
$$\Rightarrow N \models s(\eta(m)) \vee t(\eta(m)).$$

$*$ idem voor $\wedge$.

$*$ $\varphi(m)$ is $\forall x\, \psi(x,\vec{m})$: $M \models \forall x\, \psi(x,\vec{m}) \Rightarrow \forall m_0 \in M$ is $M \models \psi(m_0,\vec{m})$ (→ in woorden lezen?)

$$\Rightarrow \forall m_0 \in M \text{ is } N \models \psi(\eta(m_0),\eta(\vec{m}))$$
surjectief
$$\Rightarrow \forall n_0 \in N \text{ is } N \models \psi(n_0,\eta(\vec{m}))$$
$$\Rightarrow N \models \forall x\, \psi(x,\eta(\vec{m}))$$

$*$ analoog voor $\exists$, maar geen surj nodig.