Examen Wiskundige Logica

Master Wiskunde - UGent

Eerste examenperiode 2008-2009
Examen B

Kies vijf van de zes opgaven. Hierbij zijn opgave 1 en 2 echter verplicht om te doen. Daarover gaat ook het mondeling. Per opgave zijn 4 punten en dus maximaal 20 punten te verkrijgen.

Oefening 1. Zij L een willekeurige taal en laten T_1 en T_2 L-theorien zijn. Veronderstel dat de L-theorie $T_1 \cup T_2$ inconsistent is. Bewijs dat er een L-zin ψ bestaat met $T_1 \models \psi$ en $T_2 \models \neg\psi$. (Hint: Compactheidsstelling.)

Oefening 2. Laten X, Y, Z oneindige verzamelingen zijn en $f : X \to Y$ een surjectieve functie. Bewijs: Als $|Y| \leq |Z|$ en voor elke $y \in Y$ is $|f^{-1}(y)| \leq |Z|$ dan is $|X| \leq |Z|$.

Oefening 3. Stel dat T is een L-theorie die kwantoreliminatie toelaat. Laat $\mathfrak{M}$ een model van T zijn. Zij Δ de verzameling van alle kwantorvrije L-zinnen die waar zijn in $\mathfrak{M}$. Definieer T' door $T' := T \cup \Delta$. Bewijs dat T' volledig (compleet) is.

Oefening 4. Gegeven is een gerichte graaf, met verzameling punten V. Als $x, y \in V$ schrijven we $R(x, y)$ voor de bewering dat er een pijl is van x naar y. Bewijs dat er een deelverzameling A van V bestaat met de eigenschappen:

1. voor alle $x, y \in A$ met $x \neq y$ geldt niet $R(x, y)$,
2. voor elke $x \in V - A$ is er een $y \in A$ zo dat $R(x, y)$ of $R(y, x)$.

Oefening 5. Stel dat $\mathfrak{A}$ een struktuur is. We noemen $B \subseteq A$ definieerbaar als er een L-formule φ en elementen $a_1, \ldots, a_n \in A$ bestaan met $B = \{b \in A : \mathfrak{A} \models \varphi(b, a_1, \ldots, a_n\}$. Toon aan dat $\mathbb{R}$ als verzameling niet definieerbaar is in het veld $\mathbb{C}$.
(Hints: De volgende twee uitspraken mag u zonder bewijs gebruiken.

1. Gegeven $c_1, ..., c_n \in \mathbb{C}$, dan bestaan er $r \in \mathbb{R}$ en $s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ zodat r en s algebraisch onafhankelijk zijn over $\mathbb{Q}[c_0, ..., c_n]$.

2. Gegeven $c_1, ..., c_n \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}$ en $s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, met r en s algebraisch onafhankelijk over $\mathbb{Q}[c_0, ..., c_n]$, dan bestaat er een isomorfisme $\sigma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, waarvoor geldt:

$$\sigma(c_i) = c_i, i = 0, ..., n \text{ en } \sigma(r) = s.)$$

Oefening 6. Maak een bewijsboom voor de volgende implicatie. Doe dit in 'gedecoreerde' stijl, i.e. vermeld telkens welke regel ($\wedge I$, $\to E$, ...) je toepast. (Veronderstel dat y niet behoort tot de vrije variabelen van A en dat x niet behoort tot de vrije variabelen van B.)

$$(\exists x A(x) \to \forall y B(y)) \leftrightarrow \forall x \forall y (A(x) \to B(y)).$$

Veel succes!