Examen 'Waarschijnlijkheidsrekening en Statistiek'
26 mei 2009

1. Uit een urne die 6 rode en 4 blauwe ballen bevat, trekt men at random zonder teruglegging 3 ballen.

kans rekening

   (a) Gegeven dat ten minste 1 rode bal is getrokken, wat is de kans om 1 blauwe en 2 rode ballen te trekken?

   (b) Zelf de vraag als (a) indien de trekking van de ballen gebeurt met teruglegging.

2. In een chocoladefabriek worden pralines in dozen verpakt op 4 productielijnen A_1, A_2, A_3 en A_4 die respectievelijk voor 35%, 20%, 24% en 21% van de productie instaan. De ervaring heeft geleerd dat slechts een klein percentage dozen niet de juiste inhoud bevat: 1% van de dozen uit lijn A_1, 4% van de dozen uit lijn A_2, 2% van de dozen uit lijn A_3 en 2% van de dozen uit lijn A_4.

kans rekening

   (a) Wat is de kans dat een willekeurig gekozen doos (uit de totale productie) van een van de productielijnen A_1 of A_4 afkomstig is?

   (b) Wat is de kans dat een willekeurig gekozen doos niet de juiste inhoud bevat?

   (c) Wat is bij benadering de kans dat op 1000 willekeurig gekozen dozen er meer dan 20 dozen een verkeerde inhoud hebben?

   (d) Als we een doos hebben getrokken die de juiste inhoud bevat, wat is de kans dat ze van productielijn A_3 afkomstig is? (Bayes)

3. De toevalsvector (X, Y) heeft een gezamenlijke kansdichtheidsfunctie gegeven door

dichtheid

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cx\,, & \text{als } x^2 < y < x\,, \quad 0 < x < 1\,, \quad 0 < y < 1\,; \\ 0\,, & \text{elders}\,. \end{cases}$$

   (a) Schets het gebied waarover $f_{X,Y}$ verschillend is van 0.

   (b) Bepaal c. opdat dit een dichtheid zou zijn

   (c) Bereken de marginale dichtheid f_X van X.

   (d) Bereken de marginale dichtheid f_Y van Y.

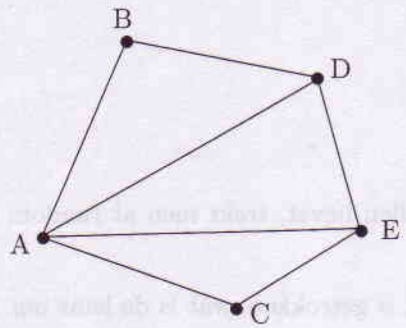
   (e) Zijn X en Y onafhankelijk? Verklaar.

   (f) Bepaal de voorwaardelijke kansdichtheidsfunctie $f_{Y|X}(y|x)$. Welke speciale verdeling is dit?

Markov

4. Beschouw een random wandeling op de volgende graaf (de wandelaar blijft nooit in een top staan en kiest at random een pad naar een volgende top).

↳ blijven staan geen optie



(a) Stel de transitiematrix op van de Markov-keten die de random wandeling modeleert.

(b) Wat is de kans dat een wandelaar die in D vertrekt, na twee verplaatsingen terug in D komt?

(c) Bepaal de stationaire verdeling. (→ voldoet aan vereisten)

5. Zij X een discrete toevalsveranderlijke met kansmassafunctie

schatten

$$p_X(1) = p, \quad p_X(2) = 1 - 2p, \quad p_X(3) = p,$$

waarbij $0 < p < 1/2$ een onbekende parameter is. Een aselecte steekproef van omvang n getrokken uit een populatie verdeeld zoals X levert n_1 keer $X = 1$, n_2 keer $X = 2$ en n_3 keer $X = 3$ op, waarbij $n_1 + n_2 + n_3 = n$.

(a) Bereken de verwachtingswaarde en variantie van X.

(b) Bepaal de maximumkansschatter voor de onbekende parameter p.

max likelihood → m.a.s

(c) Is deze schatter een zuivere schatter?

6. Hoe groot moet een aselecte steekproef getrokken uit het Vlaams kiezersbestand ten minste zijn om met betrouwbaarheid 99,74% binnen een marge van 3% te voorspellen hoeveel percent van de kiezers voor een bepaalde kandidaat zullen stemmen? → betrouwbaarh.int $[x-3, x+3]$

(laatste oefening) ↳ "veiligste"

7. Acht atleten liepen de 400m één keer op zeeniveau en één keer op grote hoogte. De tijden (in seconden) die ze klokten zijn in onderstaande tabel gegeven.

statistiek

Atleet	A	B	C	D	E	F	G	H
Zeeniveau	48.3	47.6	49.2	50.3	48.8	51.1	49.0	48.1
Grote hoogte	50.4	47.3	50.8	52.3	47.7	54.5	48.9	49.9

Test met betrouwbaarheidsdrempel $\alpha = 0.05$ de hypothese dat de prestatie van de atleten door de hoogte niet beïnvloed wordt. → eerste voorb.