1. Integralen.

a. Geef de definitie van de oneigenlijke integraal van een continue functie f over een interval $]\alpha, \beta[$ waarbij $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $\beta \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $\alpha < \beta$. Als toepassing hierop, bespreek het geval waarbij $\alpha = 0$, $\beta = +\infty$ en de functie van de vorm $f(x) = x^p$ is voor $p \in \mathbb{R}$.

b. Geef primitieven van de volgende functies:

1. $\frac{1}{1+x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$
2. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(x \in]-1, +1[)$
3. sh x waarbij $x \in \mathbb{R}$.
4. $\frac{1}{\text{ch}^2 x}$ waarbij $x \in \mathbb{R}$.
5. $\frac{1}{1-x^2}$ waarbij $x \in]1, +\infty[$.

2. Convergentie van rijen

Beschouw een rij $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C([0,1], \mathbb{R})$ en een functie f_∞ in $\mathcal{F}([0,1], \mathbb{R})$. Geef de wiskundige definitie van de volgende uitspraken:

1. De rij $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeert puntsgewijze naar f_∞ als n nadert tot oneindig.
2. De rij $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeert gelijkmatig naar f_∞ als n nadert tot oneindig.
3. De rij $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeert gemiddeld naar f_∞ als n nadert tot oneindig.

Geef verder een voorbeeld dat aantoont dat f_∞ niet noodzakelijk continu is als de convergentie puntsgewijze is en alle functies $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ continu zijn.

3. Gewone differentiaalvergelijkingen 1.

Bespreek de integratie van een algemene lineaire differentiaalvergelijking van eerste orde

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

waarbij P en Q gedefinieerd en continu zijn over een gemeenschappelijk interval I. Los als toepassing de vergelijking

$$y' - 3y = x$$

op $(x \in \mathbb{R}.)$

4. Gewone differentiaalvergelijkingen 2.

Bespreek de integratie van een gereduceerde lineaire differentiaalvergelijking van tweede orde met constante coëfficiënten.

Gent, 19 augustus 2009

Prof. W. Govaerts

Examen Analyse 2 : Oefeningen. (19 augustus 2009) Reeks 1.

Noot : Bij dit examen is het gebruik van Maple toegelaten maar het is geen examen over Maple!

1. Maclaurin reeksen

1. Beschouw de functie f
$$x \longrightarrow f(x) = \sin x^2,$$
gedefinieerd voor $x \in]-\infty, +\infty[$.
Geef de Maclaurinreeks van deze functie, d.w.z. een formule voor de algemene term. Bepaal verder de convergentiestraal, het convergentiegebied en het convergentieïnterval.

2. Beschouw de functie g
$$x \longrightarrow g(x) = \sin^2 x,$$
gedefinieerd voor $x \in]-\infty, +\infty[$.
Geef de Maclaurinreeks van deze functie, d.w.z. een formule voor de algemene term. Bepaal verder de convergentiestraal, het convergentiegebied en het convergentieïnterval.

3. Geef de laagstegraads term van de Maclaurinreeks van $f - g$ die niet identiek nul is.

2. Fourierreeksen

Beschouw de functie f die bepaald is door
$$\begin{array}{rcll} f(x) & = & 2x, & \forall x \in [0,1] \\ & = & 4-2x, & \forall x \in]1,2[\\ & = & 0 & \forall x \in [-2,0] \end{array}$$

a. Geef de bijbehorende Fourierreeks met hoofdperiode 4.
b. Geef afzonderlijk de even en de oneven coefficienten van de reeksontwikkeling.
c. Convergeert de reeksontwikkeling tot de functie f in elk punt van $[0,2]$? Geef de reden waarom of waarom niet.

3. Meervoudige integralen.

Beschouw het deel Z van de $(x,y,z)-$ ruimte dat begrensd wordt door de oppervlakken met vergelijking $y = 0$, $y + z = -5$, en $(x-1)^2 + (z-1)^2 = 1$. Integreer de functie $f(x,y,z) = x$ over Z.

4. Differentiaalvergelijkingen.

Beschouw de differentiaalvergelijking

$$y' = xy^3. \tag{1}$$

1. Door welke punten (x_0, y_0) van het (x, y) - vlak gaat er volgens de theorie een unieke oplossing?

2. Geef alle oplossingen van (1) met hun definitiegebied.

Gent, 19 augustus 2009

Prof. W. Govaerts