Wetenschappelijk Rekenen

Examen - Derde bachelor informatica

Oefeningen – 20 augustus 2009

1. Een rationale functie $R(x)$ wordt een benadering van $\exp(x) = 1+x+x^2/2+x^3/6+x^4/24+\dots$ van de orde p genoemd indien $\exp(x) - R(x) = \mathcal{O}(x^{p+1})$. Zo bvb. zijn $R_1(x) = 1 + x$, $R_2(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$ rationale benaderingen van $\exp(x)$ van eerste orde, terwijl $R_3(x) = \frac{1+x/2}{1-x/2} = 1 + x + x^2/2 + x^3/4 + \dots$ een rationale benadering is van $\exp(x)$ van tweede orde. Anderzijds is

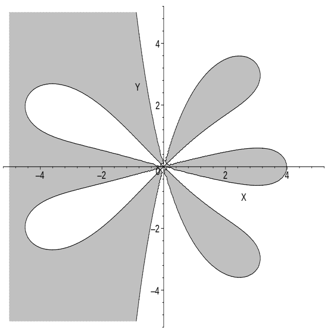
$$R_4(x) = \frac{1 + \frac{2}{5}\,x + \frac{1}{20}\,x^2}{1 - \frac{3}{5}\,x + \frac{3}{20}\,x^2 - \frac{1}{60}\,x^3} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{11}{7200}x^6 + \dots$$

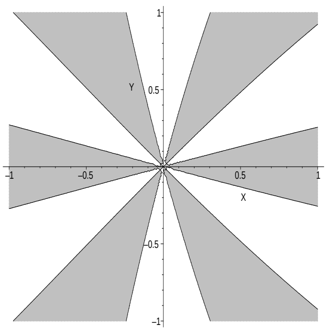
een rationale benadering van $\exp(x)$ van de orde 5. In het bijzonder : zijn de teller en de noemer van $R(x)$ resp. van graad S en van graad T en is de benadering van orde $S + T$, dan spreekt men over een Padé-benadering van $\exp(x)$. Men kan eenvoudig nagaan dat alle hierboven opgesomde voorbeelden Padé-benaderingen zijn van $\exp(x)$.

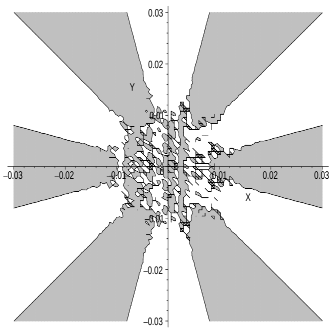
De orde van de benadering kan eenvoudig nagegaan worden door een contourplot te maken maken de verhouding $|R(z)/\exp(z)|$ voor $z \in \mathbb{C}$, zoals gebeurd is in de onderstaande figuur (links) voor $R_4(z)$. De punten waar $|R_4(z)/\exp(z)| > 1$ worden in een ander kleur aangeduid dan de punten waar $|R_4(z)/\exp(z)| < 1$. Men kan wiskundig eenvoudig bewijzen dat, in de onmiddellijke buurt van $z = 0$, de aldus bekomen figuur (midden) voor een gegeven $R(z)$ van orde p bestaat uit $2\,(p + 1)$ even brede sectoren. Omwille van deze eigenschap wordt de bekomen figuur een ordester genoemd.

Helaas, wanneer een ordester wordt gemaakt, dan wordt vastgesteld (rechts) dat er ruis optreedt in de onmiddelijke buurt van $z = 0$. Het is zo dat de hoeveelheid ruis sterk toeneemt naarmate p toeneemt. Je kunt dit vaststellen in het programma `oef1.mws`, dat via `Minerva` beschikbaar is.

Vraag : waardoor wordt die ruis veroorzaakt en hoe zou je het aan boord leggen om een figuur te maken zonder (of toch met veel minder) ruis ? Schrijf al uw ideeën hieromtrent op en test ze (voor zover mogelijk) uit. Schrijf ook die ideeën op die niet of nauwelijks tot enige verbetering leiden.







2. Schrijf de matlab code om de volgende niet-diagonale random-matrices van orde n te vormen :

   (i) B_1 is een niet-triangulaire, niet-symmetrische matrix met eigenwaarden 1, 2, 3, ..., n.

   (ii) B_2 is een symmetrische matrix met eigenwaarden 1, 2, 3, ..., n.

   (iii) B_3 is een orthogonale matrix met $\lfloor n/2 \rfloor$ eigenwaarden 1 en $\lceil n/2 \rceil$ eigenwaarden -1.

   Tip : het commando `rand(n)` creëert een random matrix van orde n.

   Wijzig nu één willekeurig matrixelement van elk van de B_i matrices (bvb. vermenigvuldigen met 10) en bekijk de wijzigingen in de eigenwaarden. Wat stel je vast ? Klopt je vaststelling met hetgeen de theorie hierover zegt ?

3. Bepaal de coefficienten van de kwadratuurformule

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)\,\mathrm{d}x \approx Q(f) = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2)$$

   zodat de graad wordt gemaximaliseerd. Bepaal tevens de constanten p en α in de uitdrukking

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)\,\mathrm{d}x = Q(f) + \alpha\, f^{(p)}(\theta)\,.$$

4. Stel dat de voorwaartse Euler methode met constante stap h toegepast wordt op $y'' = y$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. De oplossing van dit probleem kan geschreven worden als

$$y(x_n) = y(n\,h) = \cosh(n\,h) = \frac{(\exp(h))^n + (\exp(-h))^n}{2}\,.$$

   Toon aan dat de numerieke oplossing kan geschreven worden als

$$y_n = \frac{(F(h))^n + (F(-h))^n}{2}$$

   voor een zekere functie $F(h)$.

   Een tip : als $u_n = A^n\, u_0$, dan is $u_n = \sum_i c_i\, (\lambda_i)^n\, v_i$ met $A\, v_i = \lambda_i\, v_i$.

Schrijf uw oplossingen neer op papier. Plaats de bestanden die u eventueel gemaakt hebt om de vragen op te lossen op Minerva. Dit doet u door

- te surfen naar http://indianio/
- in te loggen met uw Minerva-username en -password
- uw bestanden te zippen tot 1 enkel bestand en up te loaden.

Zorg ervoor dat ik uit de naamgeving kan afleiden bij welke vraag elk bestand hoort.

Nog enkele tips :

- schrijf proper : het is de beste manier om te slijmen.
- probeer uw antwoorden bondig en correct te formuleren.
- heb je bij Maple en/of Matlab moeite met (de syntax van) bepaalde commando's, aarzel dan niet dit te vragen.