Examen "Kwantummechanica 1": 11 januari 2010

Gaussische Integralen

$$\int_0^\infty dx e^{-ax^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \ .$$
$$\int_0^\infty dx x e^{-ax^2} = \frac{1}{2a}$$
$$\int_0^\infty dx x^2 e^{-ax^2} = \frac{1}{4a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$
$$\int_0^\infty dx x^3 e^{-ax^2} = \frac{1}{2a^2}$$

THEORIE

Antwoord bondig en gevat !

1. VRAAG 1 (10 PUNTEN)

- De operator horend bij het baanimpulsmoment $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ wordt aangeduid als $\widehat{\vec{L}}$ en de bijbehorende componenten als $\left(\widehat{L_x}, \widehat{L_y}, \widehat{L_z}\right)$.

  (a) Bewijs dat $\widehat{L_y}$ een hermitische operator is.

  (b) Bewijs de volgende commutatorbetrekking
  $$\left[\widehat{L_y}, \widehat{L_z}\right] = i\hbar \widehat{L_x} \ .$$

  (c) Toon aan dat het onmogelijk is om gemeenschappelijke eigenfuncties van $\widehat{L_x}$ en $\widehat{L_y}$ te bepalen.

  (d) Toon aan dat de twee operatoren $\widehat{L_y}$ en $\widehat{L^2} = \widehat{L_x^2} + \widehat{L_y^2} + \widehat{L_z^2}$ wel degelijk gemeenschappelijke eigenfuncties bezitten.

  (e) Geef de definitie van de grootheden (ΔL^2) en $\left(\Delta \vec{L}\right)^2$. Wat is de fysische betekenis van deze grootheden?

  (f) Stel dat we in een welbepaald systeem terzelfdertijd $\widehat{L_y}$ en $\widehat{L_z}$ meten. Wat weten we dan van het product $(\Delta L_y)(\Delta L_z)$?

- We beschouwen een deeltje met massa m dat zich in één dimensie beweegt en onderhevig is aan een complexe potentiaal van het type
  $$V(x) = V_0(x) + iV_1(x) \ .$$
  Bewijs dat de tijdsafhankelijkheid van de geïntegreerde positie waarschijnlijkheidsdichtheid $P(t) = \int_{ruimte} dx P(x,t)$ voldoet aan
  $$\frac{dP(t)}{dt} = \frac{2}{\hbar}\left(\int_{ruimte} dx V_1(x) P(x,t)\right) \ .$$

2. VRAAG 2 (20 PUNTEN) *MONDELING EXAMEN*

Examen “Kwantummechanica 1”: 11 januari 2009

OEFENINGEN

BIJ HET OPLOSSEN VAN HET OEFENINGENGEDEELTE MOGEN ENKEL DE CURSUSNOTA'S (TRANSPARANTEN) EN HET HANDBOEK “QUANTUM MECHANICS” VAN BRANSDEN EN JOACHAIN GEBRUIKT WORDEN.

OEFENING 1 (10 PUNTEN)

Een deeltje met massa m beweegt in één dimensie in een potentiaal gegeven door:

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

en wordt op het tijdstip $t = 0$ in een toestand gebracht die beschreven wordt door de volgende golffunctie:

$$\Psi(x, t = 0) = A\left(1 - \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right)^2 \exp -\frac{m\omega}{2\hbar}x^2$$

1. Bepaal de golffunctie $\Psi(x, t)$ van het deeltje op een arbitrair tijdstip t. Zorg ervoor dat de golffunctie correct genormeerd is.
2. Bereken de verwachtingwaarde voor de energie $\langle E \rangle$ van het deeltje waarvoor de golffunctie gegeven wordt door $\Psi(x, t)$.
3. Stel dat we op een bepaald tijdstip t de energie van het deeltje meten. Welke waarde(n) van de energie kunnen we dan vinden? Verklaar je antwoord.
4. Bereken de verwachtingswaarde van de positie van het deeltje $\langle x \rangle$ op een arbitrair tijdstip t.
5. Stel dat we op een bepaald tijdstip t de positie van het deeltje meten. Welke waarde(n) van de positie kunnen we dan vinden? In hoeverre is dit verschillend van wat je in de context van de klassieke fysica zou vinden?

Oefening 2 (10 punten)

Beschouw de linear harmonische oscillator in één dimensie. De energie-eigenfuncties worden gegeven door $|E_n\rangle$.

- Beschouw de genormeerde eigenfuncties $|\alpha\rangle$ van de operator a_-

  $$a_- = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x + i\frac{p_x}{\sqrt{m\hbar\omega}}\right] .$$

  Dit betekent dat

  $$a_- |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle \ ,$$

  met $\alpha = \alpha_R + i\alpha_I$.

  1. Bereken $\langle x^2\rangle$, $\langle x\rangle$, $\langle p_x\rangle$ en $\langle p_x^2\rangle$ voor de toestand $|\alpha\rangle$ (TIP: herinner dat $a_+ = a_-^\dagger$) .
  2. Toon aan dat voor de toestanden $|\alpha\rangle$ het merkwaardige resultaat geldt dat

     $$\Delta x \ \Delta p_x = \frac{\hbar}{2} .$$

- De toestanden $|\alpha\rangle$ kunnen ontwikkeld worden in termen van de energie-eigenfuncties $|E_n\rangle$

  $$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{n=\infty} c_n |E_n\rangle \ .$$

  Toon aan dat de expansie-coëfficiënten c_n gegeven worden door

  $$c_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}c_0 \ ,$$

  en bepaald de waarde van c_0.

- Beschouw nu de tijdsafhankelijke toestand

  $$|\alpha(t)\rangle = \sum_{n=0}^{n=\infty} c_n |E_n\rangle \exp -\frac{i}{\hbar}E_n t \ .$$

  Toon aan dat $|\alpha(t)\rangle$ een eigenfunctie is van de operator a_- met als tijdsafhankelijke eigenwaarde

  $$\alpha(t) = \alpha \exp -i\omega t \ .$$

- In hoeverre geldt voor de toestand $|\alpha(t)\rangle$ de gelijkheid $\Delta x(t) \ \Delta p_x(t) = \frac{\hbar}{2}$? Verklaar je antwoord.