Examen Statistische Fysica 1: maandag 18 januari 2010

THEORIE Antwoord bondig en gevat !!

VRAAG 1 (10 PUNTEN)

Voor een ideaal kwantumgas kan de volgende uitdrukking voor de gemiddelde bezetting van de één-deeltjes energieniveau's afgeleid worden

$$\overline{n_i} = \frac{1}{\exp \beta \left(\epsilon_i - \mu\right) \pm 1} \ .$$

- Wat is de definitie en de fysische betekenis van de grootheid μ die in deze formule voorkomt? Waarom wordt deze grootheid μ meestal geïntroduceerd by de beschrijving van kwantumgassen en meestal achterwege gelaten bij de beschrijving van klassieke gassen ?

- Maak een schets van $\overline{n_i}$ tegen een goed gekozen dimensieloze variabele. Duid zowel het klassiek regime als het kwantumregime aan op je figuur.

- Toon aan dat in het klassiek regime bovenstaande uitdrukking voor $\overline{n_i}$ equivalent is met de Boltzmann uitdrukking voor de bezetting van ϵ_i

  $$p(\epsilon_i) = \frac{\exp -\beta\epsilon_i}{Z(T,V,N)} \ .$$

  Bepaal ook de $Z(T,V,N)$ in deze uitdrukking uitgaande van de gegeven formule voor $\overline{n_i}$.

- Hoe is de Fermi-energie ϵ_F van een ideaal Fermi-gas gedefinieerd?

- Wat is de fysische betekenis van ϵ_F ? Beschouw een systeem van N spin-$\frac{9}{2}$ deeltjes in een volume V. Leid een uitdrukking voor ϵ_F voor dit systeem af. Je kunt hierbij gebruik maken van de uitdrukking die het aantal mogelijke staande golven met impulsmoment p in het interval $[p, p+dp]$ geeft

  $$f(p)dp \ = \ \frac{V}{h^3} \ d\vec{p} \ .$$

VRAAG 2 (20 PUNTEN) : MONDELING EXAMEN

OEFENINGEN

BIJ HET OPLOSSEN VAN HET OEFENINGEN GEDEELTE MOGEN DE CURSUSNOTA'S GEBRUIKT WORDEN !!

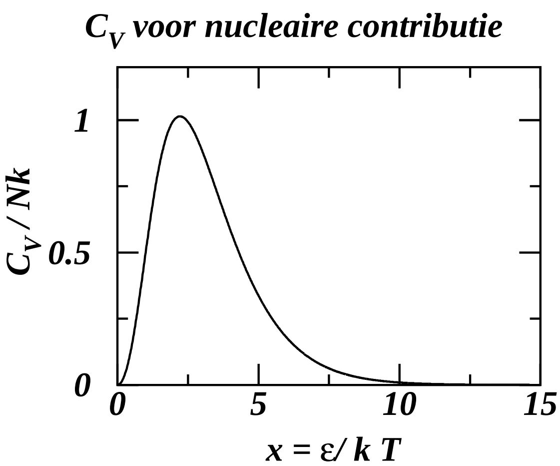
OEFENING 1 (10 PUNTEN)

Beschouw een vaste stof bestaande uit N gelocaliseerde atomen. De kernen van die atomen dragen bij tot de soortelijke warmte van de vaste stof door middel van de interactie van de kernspin met de elektrische velden in een vaste stof. We beschouwen een vaste stof met kernen met een spin gelijk aan 2. De vijf mogelijke spinwaarden langs de kwantisatieas worden dus gegeven door $M = \pm 2, \pm 1, 0$. Door de koppeling van de kernspin met de elektrische velden krijgt elke kern een energie gegeven door

$$E = \mid M \mid \epsilon \qquad (\epsilon > 0)$$

1. Bepaal voor het beschouwde nucleaire effect de bijdrage tot de gemiddelde energie $\overline{E(T)}$ van de vaste stof.
2. Bepaal de temperatuursafhankelijkheid van de entropie voor deze nucleaire contributie.
3. Bepaal voor de gevonden uitdrukking van de entropie het limietgeval $T \to 0$ K. Is dit een resultaat in de lijn van je verwachtingen? Verklaar je antwoord.
4. Bepaal voor de gevonden uitdrukking van de entropie het limietgeval $T \to \infty$ K. Is dit een resultaat in de lijn van je verwachtingen? Verklaar je antwoord.
5. **Soortelijke warmte**

   Bepaal een uitdrukking voor de temperatuursafhankelijk van deze nucleaire contributie tot de soortelijke warmte C_V van de vaste stof. Hierbij vind je een schets van $\frac{C_V}{Nk}$ als functie van $x = \beta\epsilon$. Verklaar op basis van fysische argumenten het gedrag van C_V voor $x \to 0$ en $x \to +\infty$. De C_V vertoont een piek bij $x \approx 2.5$. Verklaar de fysische oorsprong van deze piek.

6. Bereken de chemische potentiaal $\mu_{nuclear}$ voor het beschouwde nucleaire effect (koppeling van de kernspin met lokale elektrische velden). Bereken in de context van het Einstein model ook de chemische potentiaal μ_{vib} die correspondeert met

de roostervibraties in de vaste stof. Liggen de waarden voor $\mu_{nuclear}$ en μ_{vib} die je bekomt in de lijn van je verwachtingen? Verklaar je antwoord.

OEFENING 2 (10 PUNTEN)

Een ideaal gas van bosonen met spin $S = 0$ en massa m wordt gedwongen op een twee-dimensionaal oppervlakte A te bewegen.

1. Toon aan dat de dichtheid der toestanden in twee dimensies gegeven wordt door

$$f(p)dp = \frac{2A\pi}{h^2} p dp$$

2. Toon aan dat er in twee dimensies geen Bose-Einstein condensatie is (met andere woorden : bewijs dat de kritische temperatuur $T_c = 0$.)

3. Toon aan dat de groot-canonische partitiefunctie boven de kritische temperatuur de volgende vorm aanneemt

$$\Phi(T, V, \mu) = -\frac{AkT}{\lambda^2} g_2(z) \ ,$$

met

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi mkT}}$$

en

$$g_\alpha(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^\alpha} \qquad z \equiv \exp \beta\mu \ .$$

4. Toon aan dat de entropie van het systeem gegeven wordt door

$$S = \frac{Ak}{\lambda^2} \left[2g_2(z) - \frac{\mu}{kT} g_1(z) \right] \ .$$