1ste Ba Fysica-Sterrenkunde — 8.VI.2010

Wiskundige Analyse IIa, theorie (= 60% van de punten)

- *Beantwoord elke vraag (I,II,..., niet de onderverdelingen) op één van de dubbele geruite bladen. Schrijf op elk van die dubbele geruite bladen bovenaan uw naam en het Romeinse cijfer van de vraag. De ongeruite bladen dienen voor het klad en moeten niet ingediend worden, evenmin als het blad met de opgaven.*
- *De bewijzen moeten niet langer of explicieter zijn dan in de cursus, en alles wat er in de cursus aan voorafgaat mag zonder meer gebruikt worden. Staat er in de cursus 'analoog' of 'wegens de stelling van X', dan mag u dat ook zo schrijven.*
- *Vraag toelichting bij opgaven die vreemd of onduidelijk overkomen.*

Vraag I. Onderstel $f(x, y)$ van de klasse C^2 over $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, en stel

$$g(\theta, r) := f(r \cos\theta, r \sin\theta).$$

Bereken

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r \cos\theta, r \sin\theta).$$

Het resultaat mag enkel afgeleiden van g naar r en/of θ bevatten.

Vraag II.

1. Formuleer (niets bewijzen) de stelling van Green voor een algemeen eenvoudig gebied.
2. Bewijs dat de formule ook geldt voor een kwart schijf. Maak ook de figuur.

Vraag III.

1. Formuleer (niets bewijzen) de hulpstelling over de 'staart' van oneigenlijke integralen.
2. Definieer $a(\omega)$, $b(\omega)$ en $\Delta_\lambda(x)$.
3. Bewijs dat
$$s_\lambda(x) := \int_0^\lambda (a(\omega) \cos \omega x + b(\omega) \sin \omega x)\, d\omega$$
kan omgevormd worden tot een oneigenlijke integraal met Δ_λ in het integrandum.

Vraag IV.

1. Geef de formule (enkel de formule, geen proza) van de divergentiestelling.
2. Beantwoord met JA of NEEN (niets bijvoegen, enkel JA of NEEN)
   (a) de ledige verzameling is compact
   (b) $f(x, y)$ is afleidbaar $\iff$ f is afleidbaar naar x en afleidbaar naar y.
   (c) $(\sqrt{\pi})! = \sqrt{\pi}\,\Gamma(\sqrt{\pi})$.
   (d) Een Lipschitzcontinue functie over $\mathbb{R}$ is gelijkmatig continu over $\mathbb{R}$.

EINDE VAN DE THEORIE

Tijd tot 11.00. Oefeningen om 14.00, zelfde leszaal.

8.VI.2010

Wiskundige Analyse IIa

1. . . .

2. Beantwoord met JA of NEEN (niets bijvoegen, enkel JA of NEEN)

   (a) de ledige verzameling is compact JA: gesloten (stelling 1.1.6) en zeker begrensd als deelverzameling van elke bal. Ook letterlijk in voetnoot 7 op blz. 9.

   (b) $f(x, y)$ is afleidbaar $\iff$ f is afleidbaar naar x en afleidbaar naar y. NEEN want $\Longleftarrow$ is vals: afleidbaar naar x en naar y betekent dat de partieel afgeleiden naar x en naar y bestaan, maar dat is onvoldoende voor afleidbaarheid, zie 1.5.3

   (c) $(\sqrt{\pi})! = \sqrt{\pi}\,\Gamma(\sqrt{\pi})$. JA: voor elke $x > 0$ is $x! := \Gamma(x + 1)$ (zie 6.3.6) en dat is $x\Gamma(x)$ (6.3.4.)

   (d) Een Lipschitzcontinue functie over $\mathbb{R}$ is gelijkmatig continu over $\mathbb{R}$. JA: definitie (7.1) leert dat $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ als $|x - x'| < \varepsilon/C =: \delta_\varepsilon$. In de inleiding op blz. 101 staat trouwens letterlijk dat de beschouwde functies 'meer dan gewoon continu' over $\mathbb{R}$ zijn.

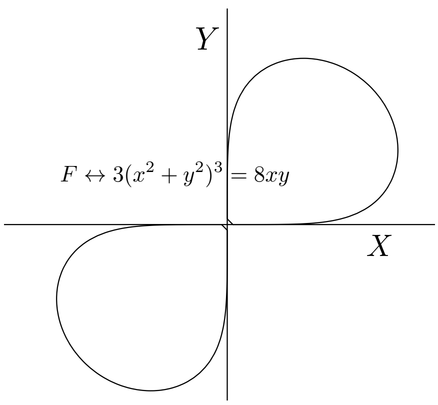
1ste Ba Wiskunde
08.VI.10
Wiskundige Analyse II a+b, oefeningen
(oefeningen = 45% van de punten)

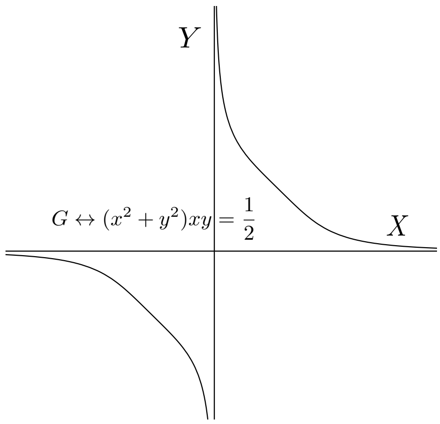
(i) *Schrijf elke vraag op een apart blad.*
(ii) *Becommentarieer uw werkwijze.*
(iii) *Het gebruik van een rekenmachine is niet toegelaten.*

Veel succes gewenst!

Vraag 1.

(a) Beschouw de krommen $F \leftrightarrow 3(x^2+y^2)^3 = 8xy$ en $G \leftrightarrow (x^2+y^2)xy = \frac{1}{2}$.





Bepaal de vergelijking van F en G in poolcoördinaten (dus van de vorm $F \leftrightarrow r = f_1(\theta)$ en $G \leftrightarrow r = f_2(\theta)$). Leid uit deze vergelijking af wat de grenzen voor θ zijn en bepaal de snijpunten tussen F en G.

(1) Beschouw het gebied $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, beschreven door

$$\begin{cases} 3(x^2+y^2)^3 \leq 8xy \\ (x^2+y^2)xy \geq \frac{1}{2} \\ 0 \leq y \leq x \\ 0 \leq z \leq x^2+y^2 \end{cases}$$

Bereken, in de meest aangewezen coördinaten, $\iiint_\Omega \frac{z}{x^2+y^2}\, dxdydz$.

Vraag 2. Zij W dat deel van $\mathbb{R}^3$ dat begrensd wordt door het oppervlak $x^2+y^2+z^2=9$ met $z \geq 0$ en dat voldoet aan

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 \geq 1 \\ z^2 \leq 3(x^2+y^2) \\ x^2+y^2 \leq \frac{27}{4} \end{cases}$$

Bereken dan

$$\iiint_W \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dxdydz$$

in de meest aangewezen coördinaten. (Vraagt een opsplitsing van de integraal.)

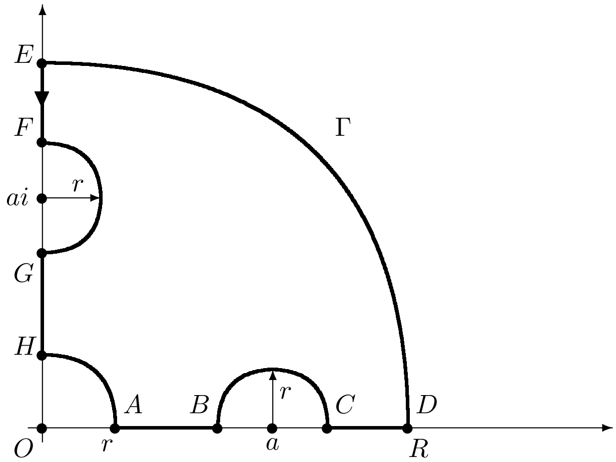
Vraag 3.

(1) Bepaal $\alpha, \gamma \in \mathbb{C}$ en $\beta \in \mathbb{R}^+$ zodat de functie

$$f(z) = \frac{e^{i\beta z} + \alpha z + 2z^2 + \gamma}{z^4(z^4 - a^4)},$$

met $a > 0$ constant, een pool van de eerste orde heeft in de oorsprong.

(2) Bereken $\oint_\Gamma f(z)dz$, met Γ als in de figuur.



(3) Leid hieruit de waarde af van de integraal $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos 2x + 2x^2 - 1}{x^4} \frac{1}{x^4 - a^4} dx.$

EINDE VAN DE OEFENINGEN

Tijd tot 18.00