18.I.2010

Wiskundige Analyse I, theorie (= 60% van de punten)

- *Beantwoord elk van de vragen I,II,III en IV op één van de dubbele geruite bladen. Schrijf op elk van die dubbele geruite bladen, bovenaan de eerste bladzijde, uw naam (familienaam in drukletters), studierichting en het Romeinse cijfer van de vraag. Stop de dubbele geruite bladen vanaf II in het dubbele geruite blad I. De ongeruite bladen dienen voor het klad en moeten niet ingediend worden, evenmin als het blad met de opgaven.*
- *De bewijzen moeten niet langer of explicieter zijn dan in de cursus, en alles wat er in de cursus aan voorafgaat mag zonder meer gebruikt worden. Staat er in de cursus 'analoog' of 'wegens de stelling van X', dan mag u dat ook zo schrijven.*
- *Als een vraag u niet helemaal duidelijk is, vraag dan toelichting.*
- *Geen rekenmachine toegestaan.*

Vraag I.

1. Geef (zonder bewijs) het 'kenmerk van Darboux' voor integreerbaarheid. Cursus blz. 69
2. Formuleer en bewijs de 'hulpstelling van Riemann' (limiet van een zekere integraal, essentieel in de context van de Fourierreeksen). Cursus blz. 166. Zoals in de les uitgelegd: wie majoreert tot $\int_{x_{k-1}}^{x_k} |\sin \lambda x| \, dx$ i.p.v. $\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} \sin \lambda x \, dx\right|$ zit met een primitieve die niet te berekenen is, en in elk geval niet $\left|\frac{-\cos \lambda x}{\lambda}\right|$ is. Velen majoreren onder absolute-waardetekens, alsof uit $A \leqslant B$ zou volgen dat $|A| \leqslant |B|$. Sommigen majoreren de integraal zonder absolute-waardestrepen, en verkrijgen dan iets als $\int_a^b f(x) \sin \lambda x \, dx < \varepsilon$, maar die conclusie is onbruikbaar! Wat we nodig hebben is $\left|\int_a^b f(x) \sin \lambda x \, dx\right| < \varepsilon$.

Vraag II.

1. Gegeven $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$. Geef de correcte logische formule, met alle kwantoren, voor
   (a) 'f is continu in elk punt van A' Cursus formule (4.6), met A i.p.v. $]a, b[$.
   (b) 'f is continu over de verzameling A' Idem (4.5), of (4.7).
   (c) 'f is gelijkmatig continu over de verzameling A' Cursus formule (4.8).
2. Formuleer en bewijs de stelling van Heine. Cursus 4.2.16. Er zijn er nogal wat die de deelrij x'_{n_k} als onafhankelijk van x_{n_k} zien ('hetzelfde nog eens'), terwijl zij echt *dezelfde* indices moet hebben. Bolzano-Weierstrass levert een deelrij op die naar een punt *van het interval* convergeert. De meesten letten daar niet op, zodat hun 'bewijs' ook voor een *open* interval $]a, b[$ opgaat.

Vraag III.

1. Formuleer (GEEN BEWIJS) de Taylorformule met restterm in twee gedaanten. Cursus 10.3.2. Velen noteren $f^{(n)}$ onterecht als een macht f^n.
2. Toon hoe de restterm van Lagrange volgt uit de integraalgedaante. Cursus blz. 159, punt 2.
3. In het bewijs van punt 2. worden twee grote stellingen gebruikt. Formuleer ze allebei. Weierstrass: cursus 4.2.13; Bolzano: 4.2.6. Beide zijn toegepast op $f^{(n)}$, niet op f.
4. Geef de Taylorformule met integraalgedaante voor een $f \in C^2(U)$, met $U \ni x_0$ een open interval. $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \int_{x_0}^{x} (x - t)f''(t) \, dt$, cursus formule (10.10).
5. Als $f \in C^0(U)$, en $g(x) := \int_{x_0}^{x} \left(\int_{x_0}^{t} f\right) dt$, geef dan $g'(x)$, $g'(x_0)$, $g''(x)$ en $g''(x_0)$. (In de cursus is $I^{\{2\}}f(x)$ de notatie voor wat hier $g(x) = \int_{x_0}^{x} f$.) Geef de naam van de stelling die hierbij gebruikt wordt (gewoon de naam, niets uitleggen). $g'(x) = \int_{x_0}^{x} f$ en $g''(x) = f(x)$ wegens Eerste Hoofdstelling; $g'(x_0) = 0$ en $g''(x_0) = f(x_0)$. De functie $I^{\{2\}}$ moet hier nergens genoemd worden.

6. Schrijf op wat de formule uit punt 4. wordt voor de g uit punt 5. $g(x) = \int_{x_0}^{x} (x-t) f(t)\, dt$, cursus laatste formule van blz. 178. Hierin is $g(x_0) = g'(x_0) = 0$ gebruikt, maar $g''(x_0) = f(x_0)$ niet.

Vraag IV.

1. Schrijf een Griekse hoofdletter 'ksi'. Ξ, zie blz. 6

   Beantwoord met JA of NEEN (enkel J of N, niets anders):

2. Een machtreeks met convergentiestraal nul is in geen enkel punt absoluut convergent. N, elke machtreeks $\sum_n a_n x^n$ 'convergeert' voor $x = 0$ absoluut, want de reeks is dan $a_0 + 0 + 0 + \dots$, en $|a_0| + 0 + 0 + \dots$ 'convergeert' natuurlijk.

3. Een primitieve kan een sprongpunt hebben. N, elke primitieve is afleidbaar, dus zeker continu.

4. Het grootste element van een verzameling is er ook het supremum van. J

5. $\lim_{t \to +\infty} \left(1 - \frac{2}{t}\right)^t = 1/e^2$. J, zie formule 7.1.14.

6. $\sum_{n=0}^{+\infty} i^n = 1/(1-i)$. N, wegens $|i| = 1$ is de reeks niet convergent.

EINDE THEORIE

Tijd tot 12.30. Oefeningen: 14.00.

18.I.2010

Wiskundige Analyse I, oefeningen (= 40% van de punten)

- *Beantwoord elk van de oefeningen I,II en III op één van de dubbele geruite bladen. Schrijf op elk van die dubbele geruite bladen, bovenaan de eerste bladzijde, uw naam (familienaam in drukletters), studierichting en het Romeinse cijfer van de oefening. De ongeruite bladen dienen voor het klad en moeten niet ingediend worden, evenmin als het blad met de opgaven.*
- *Als een vraag u niet helemaal duidelijk is, vraag dan toelichting.*
- *Geen rekenmachine toegestaan.*

Vraag I. Gegeven het beginwaardenvraagstuk

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = \sin \omega t \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases} \tag{$*$}$$

met $\omega > 0$ constant.

1. Los $(*)$ op voor $\omega \neq 1$, door *onbepaalde coëfficiënten.*
2. Los $(*)$ op voor $\omega \neq 1$, door *variatie van de constanten.* (Identieke gedeelten niet herhalen.)
3. Voorspel de *gedaante* (niets uitrekenen!) van de oplossing van $(*)$ als $\omega = 1$.
4. Bereken de limiet $\omega \to 1$ van de in 1. en 2. gevonden oplossing.

1. Kenmerkende drieterm $\lambda^2 + 1$ heeft nulpunten $\pm i$ en homogene vergelijking heeft als lineair onafhankelijke oplossingen $\cos t$ en $\sin t$. Rechterlid heeft gedaante $e^{0t}(0 \cos \omega t + 1 \sin \omega t)$ en $0 + i\omega$ is geen nulpunt van de kenmerkende drieterm als $\omega \neq 1$. Niet-homogene vergelijking heeft dus een oplossing $\quad(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$. (Het zal blijken dat $A = 0$, maar dat is toeval. Men mag niet uitgaan van een oplossing $\quad(t) = B \sin \omega t$.) Substitutie geeft

$$(-A\omega^2 \cos \omega t - B\omega^2 \sin \omega t) + (A \cos \omega t + B \sin \omega t) = \sin \omega t$$

waaruit $\begin{cases} -A\omega^2 + A = 0 \\ -B\omega^2 + B = 1 \end{cases}$, dus $A = 0, B = \frac{1}{1-\omega^2}$ en $\quad(t) = \frac{\sin \omega t}{1-\omega^2}$. Gezochte oplossing van $(*)$ heeft gedaante

$$\varphi(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + \frac{\sin \omega t}{1 - \omega^2}.$$

Hierin en in

$$\varphi'(t) = -c_1 \sin t + c_2 \cos t + \omega \frac{\cos \omega t}{1 - \omega^2}$$

de beginvoorwaarden invullen geeft $c_1 = 0$ en $c_2 + \frac{\omega}{1-\omega^2} = 1$, dus $c_1 = 0, c_2 = \frac{1-\omega-\omega^2}{1-\omega^2}$, zodat

$$\varphi(x) = \frac{(1 - \omega - \omega^2) \sin t + \sin \omega t}{1 - \omega^2}.$$

2. Wegens $W(\cos t, \sin t) = \begin{vmatrix} \cos t & \sin \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = 1$ is

$$
\begin{aligned}
(t) &= \varphi_2(t) \int \frac{R(x)\varphi_1(t)}{W(t)}\, dt - \varphi_1(t) \int \frac{R(x)\varphi_2(t)}{W(t)}\, dt \\
&= \sin t \int \sin \omega t \cos t \, dt - \cos t \int \sin \omega t \sin t \, dt \\
&= \frac{\sin t}{2} \int (\sin(\omega+1)t + \sin(\omega-1)t)\, dt \\
&- \frac{\cos t}{2} \int (\cos(\omega-1)t - \cos(\omega+1)t)\, dt \\
&= \frac{\sin t}{2} \left(-\frac{\cos(\omega+1)t}{\omega+1} - \frac{\cos(\omega-1)t}{\omega-1} \right) \\
&- \frac{\cos t}{2} \left(\frac{\sin(\omega-1)t}{\omega-1} - \frac{\sin(\omega+1)t}{\omega+1} \right) \\
&= \frac{\sin(\omega+1)t \cos t - \sin t \cos(\omega+1)t}{2(\omega+1)} \\
&- \frac{\sin t \cos(\omega-1)t + \cos t \sin(\omega-1)t}{2(\omega-1)} \\
&= \frac{\sin \omega t}{2(\omega+1)} - \frac{\sin \omega t}{2(\omega-1)} = \frac{\sin \omega t}{1-\omega^2}.
\end{aligned}
$$

Opmerking. Oplossing is begrensd:

$$
\left| \frac{(1-\omega-\omega^2)\sin t + \sin \omega t}{1-\omega^2} \right| \leqslant \frac{|1-\omega-\omega^2| + 1}{|1-\omega^2|}.
$$

3. Kenmerkende drieterm $\lambda^2 + 1$ heeft nulpunten $\pm i$ en homogene vergelijking heeft als lineair onafhankelijke oplossingen $\cos t$ en $\sin t$. Rechterlid heeft gedaante $e^{0t}(0 \cos t + 1 \sin t)$ en $0 + i$ is een enkelvoudig nulpunt van de kenmerkende drieterm. Niet-homogene vergelijking heeft dus een oplossing $(t) = t(A\cos t + B \sin t)$. Gezochte oplossing van $(*)$ heeft gedaante

$$
\varphi(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + t(A\cos t + B\sin t).
$$

4. Voor elke $t \in \mathbb{R}$ is

$$
\begin{aligned}
\lim_{\omega \to 1} \frac{(1-\omega-\omega^2)\sin t + \sin \omega t}{1-\omega^2} \left(= \frac{0}{0} \right) &= \lim_{\omega \to 1} \frac{(-1-2\omega)\sin t + t\cos \omega t}{-2\omega} \\
&= \frac{3\sin t - t\cos t}{2}
\end{aligned}
$$

Opmerking. Oplossing is onbegrensd: de term $\frac{3\sin t}{2}$ is begrensd, maar de term $-\frac{t\cos t}{2}$ is onbegrensd wegens de factor t.

Vraag II.

1. Geef de Taylor*benadering* (centraal punt $x = 0$) van $\sqrt{1+\sin x}$ tot en met x^4.
2. Bepaal voor welke waarden van x de Taylor*reeks* (die NIET gevraagd wordt) convergeert.

1. $$\left(1 + x - \frac{x^3}{3!} + \dots\right)^{1/2}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots\right) + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots\right)^2$$

$$+ \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots\right)^3 + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{4!}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots\right)^4 + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + \dots\right) - \frac{1}{8}\left(x^2 - \frac{2}{3!}x^4 + \dots\right) + \frac{3}{3!2^3}\left(x^3 + \dots\right) - \frac{15}{4!2^4}\left(x^4 + \dots\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{16}\right)x^3 + \left(\frac{1}{2^3 3} - \frac{5}{2^7}\right)x^4 + \dots$$

$$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{48} + \frac{x^4}{384} + \dots.$$

2. Deze binomiaalreeks met $\alpha = \frac{1}{2} > 0$ convergeert zeker als $-1 \leqslant x - \frac{x^3}{3!} + \dots \leqslant 1$, d.i. $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, dus voor alle $x \in \mathbb{R}$.

Vraag III. Gegeven: de reeks $\sum_n x_n$ is convergent, en voor elke n is $0 < x_n \neq 1$.

1. Bewijs dat $\sum_n (x_n)^2$ eveneens convergent is.
2. Bewijs dat $\sum_n \frac{x_n}{1-x_n}$ convergeert of bewijs dat ze niet convergeert.

(1) $\frac{x_n^2}{x_n} = x_n \to 0$ (algemene term van een convergente reeks). Uit 8.3.4.2 volgt dat $\sum_n x_n^2$ convergent is. Een van de vele andere manieren: uit $x_n \to 0$ volgt $x_n < 1$ en dus $(x_n)^2 < x_n$ als n groot genoeg is. De reeks $\sum_n (x_n)^2$ met positieve termen wordt dus gemajoreerd door de convergente $\sum_n x_n$. Men mag niét uitgaan van 'wegens d' Alembert is $\lim_n \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$', want d' Alembert is maar een *voldoende* voorwaarde, geen nodige, en bovendien is er soms ook convergentie als $\lambda = 1$.

(2) Uit $x_n \to 0$ volgt $\frac{x_n}{\frac{x_n}{1-x_n}} = 1 - x_n \to 1$. Omdat $\sum_n x_n$ convergeert is de reeks met positieve termen $\sum_n \frac{x_n}{1-x_n}$ eveneens convergent (quotiëntregel).

EINDE EXAMEN

Tijd tot 18.00.