Examen Formele Talen, Automaten en Complexiteit, groep A

7 juni 2010

Theorie

1. Zij Σ een eindig alfabet een L een reguliere taal over Σ. Toon aan dat $\{w \in \Sigma^* : ww^R \in L\}$ regulier is.

2. Zij $\Sigma = \{0, 1, 2\}$ en L een taal over Σ. Neem:

$$\mathrm{MIN}(L) := \{w \in L : \text{ geen echt prefix van } w \text{ is in } L\}.$$

(Een prefix v van w heet echt als $\epsilon \neq v \neq w$.)
Zij $L = \{0^i 1^j 2^k : i \leq k \vee j \leq k\}$. Toon aan dat L contextvrij is en dat $\mathrm{MIN}(L)$ niet contextvrij is.

$\{0^i 1^j 2^k \mid k = \min(i,j)\}$

3. Toon aan met een reductie tot het halting probleem dat het volgend probleem niet algoritmisch beslisbaar is: Gegeven een Turingmachine M. Beslis of M de lege string aanvaardt.

4. Neem CLIQUE := $\{\langle G, k\rangle : G$ is een ongerichte graaf met een kliek van tenminste k elementen $\}$. Daarbij heet een deelgraaf C van G een kliek als voor alle $u, v \in C$ met $u \neq v$ een boog tussen u en v bestaat. Toon aan dat $3 - \mathrm{SAT} \leq_P$ CLIQUE. Steunend op SAT $\leq_P 3 - \mathrm{SAT}$ toon aan dat CLIQUE NP-volledig is. (Hint: Het kan nuttig zijn in het textboek pagina 646 te beschouwen. Daar wordt een vergelijkbaar probleem opgelost.)

tegengestelde edges nemen dan die in boek

→ clique is $\in$ NP boek p 640

Als ww^R regulier is → Half(L)

p658

als L_1 NP compleet is, $L_1 \leq_p L_2$, en $L_2 \in$ NP, dan is L_2 ook NP compleet.
3-SAT is NP compleet

is SAT $\in$ NP?
sat is NP compleet.

is dan goed omdat er 1 waar is in elke clausule.

Oefeningen

1. Geef voor ieder van de volgende talen aan of deze regulier is, of deze context-vrij is, of deze beslisbaar is en of deze recursief opsombaar is. Bewijs telkens uw bewering.

   (a) $L_1 = \{ww : w \in \{a,b\}^* \text{ en } 2010 < |w| \leq 2501\}$ SD

   (b) $L_2 = \{a^n : n \text{ is deelbaar door 13 of deelbaar door 7}\}$ R

   (c) $L_3 = \{vbbw : v, w \in \{a,b,c,d,e\}^* \text{ en } \#_c(v) = \#_d(w)\}$ CF

   (d) $L_4 = \{w \in \{a,b,c\}^* : \#_a(w) = \#_c(w) \text{ en } \#_b(w) = 4k, k \geq 0\}$ CF ∩ R

   (e) $L_5 = \{w \in \{d,e,f\}^* : \#_d(w) = \#_e(w) = 2 \cdot \#_f(w)\}$ TM

   (f) $L_6 = \{\langle M \rangle : \forall n[0^n 1^n \in L(M)] \rightarrow 000111 \in L(M)\}$ Rice

   (g) $L_7 = \{\langle M \rangle : aaab \in L(M)\}$

2. Construeer voor elk van de volgende functies een Turing machine die deze berekent.

   (a) $f_1 : \{a,b\}^* \rightarrow \mathbb{N}$, $f_1(w) = n$ als $w = a^n b^n$ en $f_1(w) = 0$ anders.

   (b) $f_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f_2(x) = \lfloor \frac{x}{5} \rfloor$