EXAMEN LINEAIRE ALGEBRA EN ANALYTISCHE MEETKUNDE I

DINSDAG 12 JANUARI 2010

Exameninstructies

- Beantwoord *elke* vraag op een afzonderlijk blad.
- Vermeld je naam op elk blad, schrijf op het eerste blad ook je stamnummer.
- Het gebruik van een rekentoestel is verboden, evenals het gebruik van een GSM-toestel (GSM volledig uitschakelen).
- Je beschikt over 4 uur om dit examen op te lossen.
- Alle nota's mogen gebruikt worden bij het oplossen van dit examen. *Let er echter op niet te veel tijd te verliezen door te veel op te zoeken.*
- Resultaten uit de nota's (definities, stellingen, lemma's, enz.) die je gebruikt in je argumentatie moet je niet expliciet opschrijven, een verwijzing volstaat. Wel moet je zeer duidelijk aangeven hoe je een dergelijk resultaat gebruikt.
- Veel succes!

1. Theorie

Opgave 1. *Lineaire operatoren spelen een grote rol in de lineaire algebra. Verscheidene criteria voor het inverteerbaar zijn van een lineaire operator vinden we doorheen de cursus.*

Zij $f\colon V \to V$ een lineaire operator op een eindig-dimensionale K-vectorruimte V.

(i) Bewijs dat de volgende eigenschappen equivalent zijn:
   - (a) f is bijectief;
   - (b) f is surjectief;
   - (c) f is injectief;
   - (d) alle eigenwaarden van f in het veld K zijn verschillend van nul;
   - (e) $\det f \neq 0$;
   - (f) de duale operator $f^*\colon V^* \to V^*$ is bijectief.

(ii) Toon aan met een voorbeeld dat de eigenschappen (b) en (c) niet equivalent zijn voor lineaire operatoren op oneindig-dimensionale vectorruimten.

Opgave 2. Beschouw de Euclidische ruimte $V = \mathbb{R}^3$. Een rechte in V is een deelverzameling van de vorm $\{v + aw \mid a \in \mathbb{R}\}$ voor een bepaalde $v \in V$ en een bepaalde $w \in V \setminus \{0\}$.

Zij $D \subseteq V$ een willekeurige deelverzameling van V. Toon aan dat de volgende eigenschappen equivalent zijn.

(a) D is een rechte in V;

(b) voor alle $v, w \in D$ met $v \neq w$ geldt dat $D = \{v + a(w - v) \mid a \in \mathbb{R}\}$;

(c) er bestaan een $c \in V$ en een $w \in V \setminus \{0\}$ zodat $D = \{u \in V \mid u \times w = c\}$;

(d) er bestaan een affien vlak H en een punt $p \in H$ zodat
$$D = \{u \in V \mid \operatorname{dist}(u, H) = \operatorname{dist}(u, p)\}\,;$$

(e) er bestaat een isometrie $\varphi \in \mathsf{E}(3)$ zodat $\varphi(D)$ samenvalt met de X-as;

(f) er bestaat een verplaatsing $\varphi \in \mathsf{E}^+(3)$ zodat $\varphi(D)$ samenvalt met de X-as.

Opgave 3. (a) Beschouw de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})\,.$$

Diagonaliseer A en bepaal een inverteerbare matrix P zodanig dat $P^{-1}AP$ een diagonaalmatrix is.

(b) Zij $\mathcal{Q}$ de kwadriek in $\mathbb{R}^3$ die tegen over de standaardbasis de vergelijking

$$x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xz + 4\sqrt{2}x + 4y + 6 = 0$$

heeft. Reduceer $\mathcal{Q}$ tot zijn standaardvorm.

Druk de nieuwe coördinaten uit in functie van de coördinaten t.o.v. de standaardbasis.

Opgave 4. Stel V een n-dimensionale vectorruimte met basis $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ over een veld K met $n \geq 2$. We definiëren een lineaire afbeelding

$$f \colon V \to V \colon \begin{cases} f(v_i) = v_{i+1} & \forall i \in \{1, \ldots, n-1\}\,; \\ f(v_n) = 0\,. \end{cases}$$

(a) Bepaal de matrixvoorstelling A van f ten opzichte van de basis $\mathcal{B}$.

(b) Toon aan dat $f^{n-1} \neq 0$ maar $f^n = 0$. Leid hieruit af dat $A^{n-1} \neq 0$ en $A^n = 0$.

(c) Stel $g \colon V \to V$ een lineaire afbeelding zodanig dat $g^{n-1} \neq 0$ en $g^n = 0$. Toon aan dat er een basis $\mathcal{C}$ van V bestaat zodanig dat de matrixvoorstelling van g ten opzichte van deze basis $\mathcal{C}$ juist de matrix A, bekomen in deel (a) van deze opgave, is.

(d) Stel M en N twee $n \times n$-matrices over K zodanig dat $M^n = N^n = 0$ maar $M^{n-1} \neq 0$ en $N^{n-1} \neq 0$. Toon aan dat de matrices M en N toegevoegd zijn aan elkaar.