Examen Wiskundige Logica

Master Wiskunde - UGent

Eerste examenperiode 2009-2010

Kies vijf van de zes opgaven. Hierbij zijn opgave 1 en 2 echter verplicht om te doen. Daarover gaat ook het mondeling. Per opgave zijn 4 punten en dus maximaal 20 punten te behalen.

Oefening 1. Zij L een willekeurige eerste-orde taal en A en B twee willekeurige L-structuren. Definieer dan het relatiesymbool $\preccurlyeq_1$ als volgt:

$$A \preccurlyeq_1 B$$
$$\Leftrightarrow$$
$$A \subseteq B \wedge \Big[(B \models \exists x_1, ..., x_n \varphi(x_1, ..., x_n)) \Leftrightarrow (\exists a_1, ..., a_n \in A : B \models \varphi(a_1, ..., a_n))\Big]$$

deelstruc

voor alle $\varphi \in L_A$ met φ kwantorvrij. Toon aan dat er dan voor $A \subseteq B$ geldt:

$$A \preccurlyeq_1 B \Leftrightarrow \exists C : B \subseteq C \wedge A \preccurlyeq C,$$

waar $A \preccurlyeq C$ betekent dat A een elementaire substructuur van de L-structuur C is. (Hint: Bekijk voor de richting van links naar rechts $Th(A) \cup \Delta(B)$ waarbij $Th(A) = \{\psi \in L_A : \psi \text{ een zin en } A \models \psi\}$ en $\Delta(B) = \{\psi \in L_B : B \models \psi \text{ en } \psi \text{ is een kwantorvrije zin}\}$.)

Oefening 2. Zij G een eindig voortgebrachte groep, i.e. $G = \langle g_1, ..., g_n \rangle$, $n \in \mathbb{N}$, en $H \subsetneq G$ een deelgroep van G. Dan bestaat er een deelgroep H' die maximaal is ten opzichte van de inclusie en waarvoor geldt

$$H \subseteq H' \subsetneq G.$$

Oefening 3. Zij I een oneindige verzameling. Stel dat $\mathcal{C} = \{C_i | i \in I\}$ en $\mathcal{D} = \{D_i | i \in I\}$ families van verzamelingen zijn, zodat $|C_i| \leq |D_i|$ en $2 \leq |D_i|$ voor elke $i \in I$. Toon aan:

$$\sum_{i \in I} |C_i| \leq \prod_{i \in I} |D_i|.$$

(Opmerking. De som van kardinaliteiten is gedefinieerd via de disjuncte vereniging.)

Oefening 4. De structuur van rationale getallen $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ heeft in het bijzonder twee eigenschappen:

[1] Als $\{a_1, \ldots, a_k\}$ en $\{b_1, \ldots, b_k\}$ twee verzamelingen van elementen uit $\mathbb{Q}$ zijn en als $a_1 < \ldots < a_k$ en $b_1 < \ldots < b_k$ is dan bestaat er een automorphisme h van $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ met $h(a_i) = b_i$ voor $1 \leq i \leq k$.

[2] Als $\langle X, < \rangle$ een aftelbare dichte lineaire ordening is, dan bestaat er een inbedding van $\langle X, < \rangle$ naar $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$.

Toon dit aan en toon verder aan: Als $\langle S, < \rangle$ een aftelbaar oneindige lineaire ordening is waarvoor de eigenschappen [1] en [2] met $\langle S, < \rangle$ in plaats van $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ gelden dan is $\langle S, < \rangle$ isomorf met $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$.

Oefening 5. Stel T is een theorie in een aftelbare taal L; we gaan ervan uit dat T een oneindig model heeft en dat T kategorisch is voor een oneindig kardinaalgetal. De theorie T' bestaat uit die L-zinnen, die waar zijn in elk oneindig model van T. Toon aan dat T' volledig is. (Hint: Löwenheim-Skolemstellingen)

Oefening 6. Laat met bewijsbomen (in gedecoreerde stijl) zien:

1. $\phi \rightarrow \psi \vdash (\chi \rightarrow \phi) \rightarrow (\chi \rightarrow \psi)$.

2. $(\psi \rightarrow \forall x \phi(x)) \leftrightarrow \forall x(\psi \rightarrow \phi(x))$. Hierbij komt x niet voor in ψ. (Waarom is deze variabelenconditie van belang?)

Veel succes!