Examen Projectieve Meetkunde — Oefeningen
2de jaar bachelor wiskunde — Academiejaar 2009-2010
17 juni 2010

Vraag 1. Beschouw de volgende (4×4)-matrix A gedefinieerd over een veld K

$$A := \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ d & 0 & 0 & 1 \\ e & 0 & 0 & 0 \\ f & g & 0 & h \end{pmatrix},\ a,b,c,d,e,f,g,h \in K.$$

(a) Geef de nodige en voldoende voorwaarden op a,b,c,d,e,f,g en K opdat A samen met de identiteit van $\mathrm{Aut}(K)$ een symplectische polariteit in $\mathrm{PG}(3,K)$ bepaalt.

(b) Stel dat de karakteristiek van K verschillend is van twee, stel $a=c=d=f=0$, $b=e\neq 0$, $g=h=1$. Welke polariteit definieert A, samen met de identiteit van $\mathrm{Aut}(K)$?

Zij Ω de verzameling van absolute punten van de polariteit β, gedefinieerd in (b).

(c) Geef de vergelijking van Ω.

(d) Zij $K=\mathbb{R}$ en p_1 het punt met coordinaten $(1,0,0,0)$. Bepaal de coördinaten van de punten in $p_1^\beta \cap \Omega$ en toon aan dat deze op twee rechten liggen door p_1.

(e) Zij $K=\mathbb{F}_q$, en zij π het vlak met vergelijking $X_1=0$. Hoeveel punten van Ω zijn bevat in X_1?

Vraag 2. Zij $Tr := T_{\mathbb{F}_{2^h}/\mathbb{F}_2}$ het spoor van $\mathbb{F}_{2^h}$ over $\mathbb{F}_2$.

(a) Zij U de verzameling van alle punten in $\Pi := \mathrm{PG}(2,2^h)$ met coördinaten

$$(1,0,a),(0,1,b),(1,1,c),$$

waarvoor $Tr(a)=Tr(b)=Tr(c)=0$. Hoeveel punten bevat U?

(b) Toon aan dat elke rechte van $\mathrm{PG}(2,2^h)$ minstens 1 punt met de verzameling $B := U\cup\{(0,0,1)\}$ gemeen heeft.

(c) Laat Π ingebed zijn in $\mathrm{PG}(n,2^h)$, $n\geq 3$, en zij R een punt van $\mathrm{PG}(n,2^h)$, niet in Π. Zij B' de verzameling van punten op de rechten van de vorm $\langle R,P\rangle$, met $P\in B$. Toon aan dat elke $(n-2)$-dimensionale ruimte van $\mathrm{PG}(n,2^h)$ minstens 1 punt gemeen heeft met B'.

Vraag 3. Zij L een rechte van het projectief vlak $\mathcal{P}$. Zij ϕ_1, resp. ϕ_2, een elatie met as L en centrum p_1, resp. p_2, waarbij $p_1\neq p_2$. Toon aan dat $\phi_1\phi_2$ een elatie is met as L en centrum $c\neq p_1,p_2$.