# EXAMEN
# RELATIVITEITSTHEORIE

Academiejaar 2009-2010

groep 1, 14/01/2010

theorie schriftelijk

1. Het massaloze spinorveld of Weylveld
   - Stel een scalaire Lagrangiaan op voor het Weylveld.
   - Toon aan dat de resulterende Weylvergelijking een massaloos deeltje beschrijft.
   - Bepaal de heliciteit van de verschillende deeltjestoestanden.
   - Is deze theorie pariteitsinvariant?

   Gegeven:

$$
\begin{aligned}
V^{A\dot{A}} = V^{\mu}\sigma_{\mu}^{A\dot{A}} &= V^0(\mathbb{1})^{A\dot{A}} - \vec{V}.(\vec{\sigma})^{A\dot{A}} && (1)\\
\epsilon\mathbb{1}\epsilon^T &= \mathbb{1} && (2)\\
\epsilon(\sigma^i)\epsilon^T &= -(\sigma^i)^T && (3)\\
\{\sigma^i,\sigma^j\}_+ &= 2\delta^{ij} && (4)\\
\vec{S} &= \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma} && (5)
\end{aligned}
$$

2. Gebruik het equivalentieprincipe om de uitdrukking af te leiden voor de gravitationele roodverschuiving in een algemeen (zwak) gravitatieveld, met Newtoniaanse potentiaal $\phi$.

   Gegeven: $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\Delta v}{c}$ voor de longitudinale Dopplerverschuiving bij kleine $v$.

3. Beschouw het lijnelement

$$ds^2 = c^2dt^2 - R'(\lambda)^2 d\lambda^2 - R(\lambda)^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\,, \qquad (6)$$

   waarbij $R(\lambda)$ een algemene (brave) functie is van de coördinaat $\lambda$. Leg in enkele woorden uit, waarom al de componenten van de Riemann tensor verdwijnen voor deze metriek.

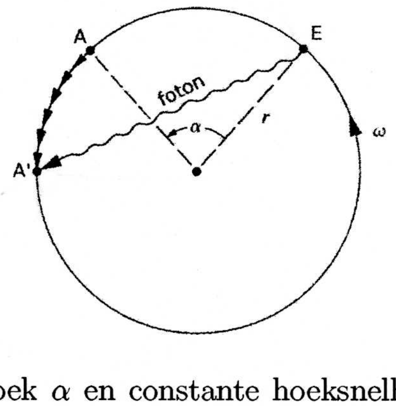
# Relativiteitstheorie
# oefeningen examen

14 januari 2010

Het oefeningen examen is een open-boek examen, maar oplossingen van oefeningen mogen <u>niet</u> gebruikt worden. Verder hebt u geen nood aan rekenmachines, gsm's of eender welke vorm van elektronica. Het examen telt twee vragen: vergeet de achterzijde niet. U kan het maximum aantal punten behalen zonder te antwoorden op de onderdelen aangeduid met (extra). Los eerst de hoofdvragen op. Als u tijd rest, kan u de extra vragen beantwoorden.

1. **Foton in de zwierder**
   Beschouw een centrifuge die ronddraait met een vaste hoeksnelheid $\omega$ en straal $r$. Twee atomen $E$ en $A$ van de rand van de centrifuge liggen in het rotatievlak en vormen een hoek $\alpha$, zoals op de tekening (zie Figuur 1). Het atoom $E$ zendt licht uit met golflengte $\lambda_E$. Een foton daarvan wordt door atoom $A$ opgevangen in $A'$. Treedt er een golflengteverschuiving op? Zo ja, geef het functioneel verband in $r$, $\alpha$ en $\omega$. Bereken hiervoor de grootheid
   $$\frac{\lambda_A}{\lambda_E}$$
   in het laboratoriumstelsel, als je weet dat $E = u^\mu p_\mu$ met $p$ de vierimpuls van het foton en $u$ de viersnelheid van een atoom.

(extra) Bewijs de gegeven relatie voor de energie $E = u^\mu p_\mu$.




Figuur 1: Onder constante hoek $\alpha$ en constante hoeksnelheid $\omega$ draaien atoom $E$ en $A$ rond. Licht dat door $E$ werd uitgezonden, wordt opgevangen door $A$ in $A'$.

2. **Derde wet van Kepler**
Toon aan dat voor een circulaire baan van een massief lichaam rond een zwart gat (Schwarzschild metriek) de derde wet van Kepler exact geldt:

$$\omega^2 r^3 = \frac{R_S c^2}{2}.$$

Hier is $\omega = \frac{d\phi}{dt}$ de hoeksnelheid gezien door een waarnemer op oneindig en

$$R_S = \frac{2GM}{c^2}$$

is de Schwarzschildstraal. Deze relatie geldt ongeacht de baan stabiel of onstabiel is.

(a) Bepaal een uitdrukking voor $\omega$ met behulp van de eerste integralen.

(b) Bereken de straal $r_{stabiel}$ en $r_{onstabiel}$ waarop er een circulaire baan bestaat in functie van het draaimoment per eenheid van massa $\tilde{L}$ en $R_S$.

(c) Wat is het minimum draaimoment $\tilde{L}_{min}$ opdat er een (on)stabiele gebonden baan is rond het zwart gat?

(d) Controleer nu dat voor de gevonden circulaire baan de derde wet van Kepler inderdaad exact geldt.

Veel succes!