1ste Ba Fysica-Sterrenkunde — 20.VIII.2010

Wiskundige Analyse IIa, theorie (= 60% van de punten)

- *Neem per vraag (I,II,..., niet per onderverdeling) een nieuw dubbel geruit blad. Schrijf op elk van die dubbele geruite bladen bovenaan uw naam en het Romeinse cijfer van de vraag. De ongeruite bladen dienen voor het klad en moeten niet ingediend worden, evenmin als het blad met de opgaven.*
- *De bewijzen moeten niet langer of explicieter zijn dan in de cursus, en alles wat er in de cursus aan voorafgaat mag zonder meer gebruikt worden. Staat er in de cursus 'analoog' of 'wegens de stelling van X', dan mag u dat ook zo schrijven.*
- *Vraag toelichting bij opgaven die vreemd of onduidelijk overkomen.*

Vraag I.

1. Formuleer (GEEN bewijs) de Hulpstelling van Riemann.
2. Formuleer (GEEN bewijs) de Oneigenlijke Hulpstelling van Riemann.
3. Vul aan (niets bewijzen): $\Delta_\lambda(x) = \ldots$
4. Noem en definieer de bijzondere continuïteitseigenschap die een functie moet hebben voor de Oneigenlijke Singuliere Integraal van Dirichlet.
5. Formuleer en bewijs de Oneigenlijke Singuliere Integraal van Dirichlet.

Vraag II.

1. Definieer 'nulverzameling van $\mathbb{R}^2$'.
2. Bewijs dat een gladde kromme in $\mathbb{R}^2$ een nulverzameling is. Maak ook de figuur.

Vraag III.

1. Vul aan en bewijs: *als... dan is* $\oiint_{\partial E} \frac{\mathbf{1}_{rad}}{\|\mathbf{r}\|^2} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0$. (Vraagt enig gereken om aan te tonen dat het veld een bijzondere eigenschap heeft.)
2. Formuleer (zonder bewijs) de gebruikte stelling.

EINDE VAN DE THEORIE

Tijd tot 11.00. Oefeningen om 14.00, zelfde leszaal.

1ste Ba Wiskunde
20.VIII.2010
Wiskundige Analyse II
oefeningen (45% van de punten)

(i) *Schrijf elke vraag op een apart blad.*
(ii) *Becommentarieer uw werkwijze.*
(iii) *Het gebruik van een rekenmachine is niet toegelaten.*

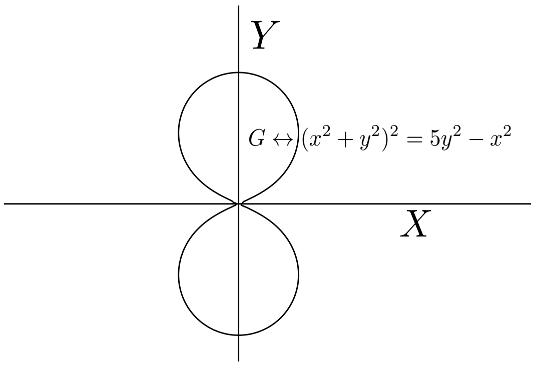
Veel succes gewenst!

Vraag 1.

(a) Beschouw de krommen

$$F \leftrightarrow (x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$$
$$\text{en} \quad G \leftrightarrow (x^2+y^2)^2 = 5y^2 - x^2.$$

(Figuur toont G.)



Bepaal de vergelijking van F en G in poolcoördinaten (dus van de vorm $F \leftrightarrow r = f_1(\theta)$ en $G \leftrightarrow r = f_2(\theta)$). Leid uit deze vergelijkingen af wat de snijpunten van F en G zijn.

(b) Beschouw het gebied $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, beschreven door

$$\begin{cases} (x^2+y^2)^2 \geq x^2 - y^2 \\ (x^2+y^2)^2 \leq 5y^2 - x^2 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{3}x \\ 0 \leq z \leq \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

Bereken, in de meest aangewezen coördinaten,

$$\iiint_\Omega \frac{x}{x^2+y^2}\, dxdydz.$$

(Vervolgt op keerzijde)

NIEUW DUBBEL BLAD

Vraag 2. Zij W dat deel van $\mathbb{R}^3$ dat voldoet aan

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 \leq \frac{1}{2} \\ (x^2+y^2+z^2)^2 \geq z^2-x^2-y^2 \\ z^2 \geq \frac{1}{3}(x^2+y^2) \\ z > 0 \end{cases}$$

Bereken

$$\iiint_W \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dxdydz$$

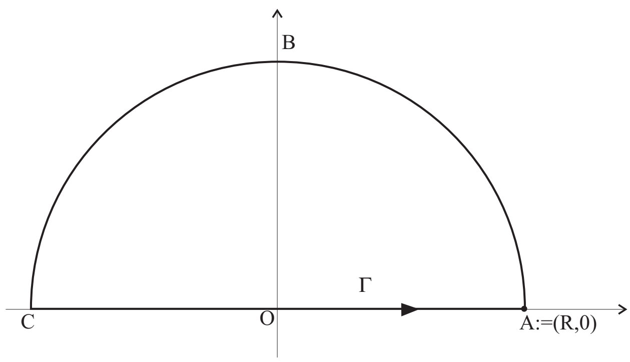
in de meest aangewezen coördinaten.

NIEUW DUBBEL BLAD

Vraag 3.

(1) Zoek de singulariteiten van $f(z) = z^2 \frac{e^{biz}}{z^4+4a^4}$ met $a, b \in \mathbb{R}^+$.

(2) Bereken $\oint_\Gamma f(z)\, dz$, waarbij Γ de onderstaande contour is.



(3) Leid hieruit de waarde af van

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 \cos bx}{x^4+4a^4}\, dx \qquad a, b \in \mathbb{R}^+.$$

EINDE VAN DE OEFENINGEN

Tijd tot 18.00