Kwantummechanica:
examen tweede zittijd 2009–2010

1 Theorie

1.1 Een deeltje in een centrale potentiaal

Geef de afleiding van de radiële golfvergelijking. Herschrijf deze als een eendimensionale Schrödingervergelijking en bespreek. Leid het gedrag af bij kleine r.

1.2 Elektromagnetisme

Leid de Schrödingervergelijking af voor een deeltje in een elektromagnetisch veld. Bespreek het ijkprincipe. Gegeven zijn:

$$\vec{F} = e\left(\vec{E} + \frac{\vec{v} \times \vec{B}}{c}\right) ,$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} , \qquad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} .$$

Examen Kwantummechanica: oefeningen

2009-2010, tweede zittijd, 3de Bachelor Wiskunde en 3de Bachelor Fysica en Sterrenkunde

16 augustus 2010, 08:30

1. *Coherente toestanden:*
   Beschouw de harmonische oscillator
   $$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)$$
   met $\hat{a}$ and $\hat{a}^\dagger$ de annihilatie- en creatie-operatoren, die voldoen aan
   $$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1.$$
   De eigentoestanden van deze Hamiltoniaan worden gegeven door $\{|n\rangle, n \in \mathbb{N}\}$, met bijbehorende eigenwaarden $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$. Verder geldt
   $$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\,, \qquad a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle\,.$$
   (a) Toon aan dat de toestand
   $$|\phi_\alpha\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle\,, \quad \alpha \in \mathbb{C}$$
   een eigentoestand is van de operator $\hat{a}$, en bepaal de bijbehorende eigenwaarde. Toon ook aan dat deze toestand correct genormeerd is ($\langle\phi_\alpha|\phi_\alpha\rangle = 1$).

   (b) Bepaal de verwachtingswaarden $\langle\phi_\alpha|\hat{x}|\phi_\alpha\rangle$ en $\langle\phi_\alpha|\hat{p}|\phi_\alpha\rangle$ met
   $$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega m}}\left(\hat{a} + \hat{a}^\dagger\right) \qquad \hat{p} = -\mathrm{i}\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega m}}\left(\hat{a} - \hat{a}^\dagger\right).$$
   (c) Stel dat de harmonische oscillator zich op tijdstip $t = 0$ in de toestand $|\phi_\alpha\rangle$ bevindt: $|\psi(0)\rangle = |\phi_\alpha\rangle$. Bepaal de tijdsgeëvolueerde toestand
   $$|\psi(t)\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}t}|\psi(0)\rangle$$
   en toon aan dat dit nog steeds een eigentoestand is van $\hat{a}$. Wat is de bijbehorende eigenwaarde op tijdstip t.

   (d) Bepaal eveneens $\langle\psi(t)|\hat{x}|\psi(t)\rangle$ en $\langle\psi(t)|\hat{p}|\psi(t)\rangle$, en schrijf deze in functie van $x_0 = \langle\psi(0)|\hat{x}|\psi(0)\rangle$ en $p_0 = \langle\psi(0)|\hat{p}|\psi(0)\rangle$.
   Kan je inzien waarom deze coherente toestanden ook klassieke toestanden genoemd worden?

   (e) Pas de Baker-Campbell-Hausdorff formule $\exp(\hat{A} + \hat{B}) = \exp(\hat{A})\exp(\hat{B})\exp(-[\hat{A}, \hat{B}]/2 + \ldots)$ toe om aan te tonen dat
   $$|\phi_\alpha\rangle = \exp\left(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}\right)|0\rangle\,.$$
   De hogere orde bijdragen "..." in de Baker-Campbell-Hausdorff formule vallen weg in dit geval. Herschrijf de creatie- en annihilatie-operatoren in termen van $\hat{x}$ en $\hat{p}$, en pas opnieuw de Baker-Campbell-Hausdorff formule toe om de golffunctie $\phi_\alpha(x) = \langle x|\phi_\alpha\rangle$ te bepalen.

2. *Storingsrekening in een diatomische molecule:*
De Hamiltoniaan van een stijve diatomische molecule (geen vibrationele vrijheidsgraden) wordt gegeven door

$$\widehat{H} = \frac{\widehat{\boldsymbol{L}}^2}{2I} + B\widehat{L}_z + C\widehat{L}_x.$$

waarbij we het geval $C \ll B$ beschouwen.

   (a) Beschouw eerst het geval $C = 0$. De sferische harmonieken $|l, m\rangle$ diagonaliseren deze Hamiltoniaan. Bepaal de bijbehorende eigenwaarden $E_{l,m}$. Waarom verwacht je ook een afhankelijkheid van het kwantumgetal m?

   (b) Beschouw de term $C\widehat{L}_x$ nu als storingsterm. Bepaal nu de eerste-orde correcties op de golffunctie en de eerste en tweede orde correcties op de energie-eigenwaarden met behulp van tijdsonafhankelijke storingsrekening.
   Tip: Herschrijf $\widehat{L}_x$ in termen van de ladder-operatoren $\widehat{L}_+$ en $\widehat{L}_-$.

Extra: Hoe zou je de eigenwaarden en eigenvectoren van $\widehat{H}$ exact bepalen. Je hoeft dit niet te doen; een complete uitleg van op welke manier dit mogelijk is volstaat. In principe kan je hieruit de eigenwaarden onmiddellijk aflezen.