EXAMEN LINEAIRE ALGEBRA EN ANALYTISCHE MEETKUNDE I

MAANDAG 6 SEPTEMBER 2010

Exameninstructies

- Beantwoord *elke* vraag op een afzonderlijk blad.
- Vermeld je naam op elk blad, schrijf op het eerste blad ook je stamnummer.
- Het gebruik van een rekentoestel is verboden, evenals het gebruik van een GSM-toestel (GSM volledig uitschakelen).
- Je beschikt over 4 uur om dit examen op te lossen.
- Alle nota's mogen gebruikt worden bij het oplossen van dit examen. *Let er echter op niet te veel tijd te verliezen door te veel op te zoeken.*
- Resultaten uit de nota's (definities, stellingen, lemma's, enz.) die je gebruikt in je argumentatie moet je niet expliciet opschrijven, een verwijzing volstaat. Wel moet je zeer duidelijk aangeven hoe je een dergelijk resultaat gebruikt.
- Veel succes!

Opgave 1. In opmerking 5.4.14(1), pagina 87, staat dat een Jordan blok geconjugeerd is met zijn getransponeerde.

(a) Verklaar deze opmerking door het volgende aan te tonen:

(i) Toon aan dat de volgende matrices in $M_n(K)$, K een veld, matrixvoorstellingen zijn van dezelfde lineaire afbeelding ten opzichte van twee verschillende geordende basissen.

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \tilde{J} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

(ii) Bepaal een matrix $P \in \mathsf{GL}_n(K)$ zodat $P^{-1}JP = \tilde{J}$.

(b) Zijn alle matrices in $M_n(\mathbb{C})$ geconjugeerd aan hun getransponeerde? Verklaar je antwoord.

Opgave 2. Beschouw de Euclidische ruimte $V = \mathbb{R}^3$, en zij $v \in V$ een vast gekozen niet-nul vector. Beschouw de afbeeldingen

$$\alpha\colon V \to \mathbb{R}\colon w \mapsto v \cdot w \quad \text{en}$$
$$\beta\colon V \to V\colon w \mapsto v \times w\,.$$

(a) Toon aan dat de afbeeldingen α en β lineaire afbeeldingen zijn.

(b) Zijn α en β injectief, surjectief, bijectief? Verklaar je antwoord.

(c) Geef een meetkundige beschrijving van $\ker(\alpha)$, $\ker(\beta)$ en $\mathrm{im}(\beta)$.

(d) Bepaal de reële eigenwaarden en bijhorende eigenruimten van de lineaire operator β. Toon aan dat β niet diagonaliseerbaar is over $\mathbb{R}$.

(e) Bepaal de reële eigenwaarden en bijhorende eigenruimten van de lineaire operator β^2. Toon aan dat β^2 wel diagonaliseerbaar is over $\mathbb{R}$.

Opgave 3. (a) Beschouw de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

Diagonaliseer A en bepaal vervolgens een orthonormale basis van eigenvectoren voor A.

[Hint: één van de eigenwaarden is -3]

(b) Zij Q de kwadriek in $\mathbb{R}^3$ met vergelijking

$$5x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4xy + 4xz - 8yz + 18x + 36y + 36z - 96 = 0.$$

Reduceer Q tot zijn standaardvorm en geef de coördinatentransformaties.

Opgave 4. (a) Ga na voor welke waarde van $\lambda \in \mathbb{R}$ de volgende drie veeltermen in $\mathbb{R}[x]$ lineair onafhankelijk zijn.

$$2x^2 - x + 1, \quad -x^2 + 3x + 2, \quad 5x^2 - \lambda$$

(b) Stel C een willekeurige $n \times n$-matrix over een veld K zodanig dat $C^2 = C$. Toon aan dat C diagonaliseerbaar is.

(c) Stel $A = (a_{ij})$ een willekeurige $n \times m$-matrix over een veld K, voor n en $m \geq 2$, met a_{11} verschillend van 0. Definieer voor alle $2 \leq i \leq n$ en $2 \leq j \leq m$,

$$d_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{i1} & a_{ij} \end{vmatrix}$$

en

$$D = \begin{pmatrix} d_{22} & \dots & d_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{n2} & \dots & d_{nm} \end{pmatrix} \in M_{(n-1)\times(m-1)}(K).$$

Toon aan dat rang(D)=rang$(A) - 1$.