Wetenschappelijk Rekenen

Examen - Derde bachelor informatica

Oefeningen - Oplossingen – 9 september 2010

1. Gegeven de $n \times n$-matrices A en B en de $n \times 1$-vector u. Van de matrices A en B zijn de $L\,U$ factorisaties bekend : $A = L_A\,U_A$ en $B = L_B\,U_B$. Bepaal op een computationeel efficiënte manier $x = (A^{-1} + B^{-1})\,(A+B)\,u$ en $y = (A+B)\,(A^{-1} + B^{-1})\,u$.

   Oplossing : De gevraagde vectoren x en y kunnen geschreven worden als

$$
\begin{aligned}
x &= 2\,u + A^{-1}\,B\,u + B^{-1}\,A\,u = 2\,u + x_1 + x_2 \\
y &= 2\,u + B\,A^{-1}\,u + A\,B^{-1}\,u = 2\,u + y_1 + y_2\,,
\end{aligned}
$$

   waarbij

   - $A\,x_1 = B\,u$
   - $B\,x_2 = A\,u$
   - $y_1 = B\,z_1$ met $A\,z_1 = u$
   - $y_2 = A\,z_2$ met $B\,z_2 = u\,.$

   De gevraagde sequentie is dan (zie `opl_oef1.m`)

```
x_1=U_A\(L_A\(B*u));
x_2=U_B\(L_B\(A*u));
y_1=B*(U_A\(L_A\u));
y_2=A*(U_B\(L_B\u));
t=2*u;
x=t+x_1+x_2
y=t+y_1+y_2
```

2. Bepaal de coefficienten van de kwadratuurformule

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)\,f(x)\,\mathrm{d}x \approx Q(f) = w_1\,f\,(x_1) + w_2\,f\,(x_2) + w_3\,f\,(x_3)$$

   zodat de graad wordt gemaximaliseerd. Bepaal tevens de constante p in de uitdrukking

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)\,f(x)\,\mathrm{d}x = Q(f) + \alpha\,f^{(p)}(\theta)\,.$$

   Hierbij is α een van 0 verschillende constante.

   Oplossing : de volgende instructies leveren de kwadratuurformule (zie `opl_oef2.mws`):

```
restart;
n:=3;
wf:=x->(1-x)*(1+x);
seq(sum(w[i]*x[i]^j,i=1..n)-int(wf(x)*x^j,x=-1..1),j=0..2*n-1);
solve({%},{seq(w[i],i=1..n),seq(x[i],i=1..n)});
allvalues([%]);
assign([%][1]);
```

Het resultaat is

$$Q(f) = \frac{14}{45}\, f\left(-\frac{\sqrt{21}}{7}\right) + \frac{32}{45}\, f\,(0) + \frac{14}{45}\, f\left(-\frac{\sqrt{21}}{7}\right).$$

Om de foutterm te vinden, vervangen we $f(x)$ door x^6 (we weten in elk geval dat $p \geq 6$, want de formule is per constructie juist voor $f(x) = 1,\, x,\, \ldots,\, x^5$), en we vinden met de instructies

```
int(x^(2*n)*wf(x),x=-1..1)-sum(w[i]*x[i]^(2*n),i=1..n):
simplify(%); # fout bij f(x)=x^(2*n)
```

dat $p = 6$ (want er is een van 0 verschillende fout) en

$$6!\,\alpha = \frac{32}{2205} \quad \text{zodat} \quad \alpha = \frac{1}{6!}\,\frac{32}{2205} = \frac{2}{99225}\,.$$

3. Stel dat we, voor het berekenen van $f'(t)$, gebruik maken van extrapolatie op basis van de voorwaartse formule

$$f'(t) \approx \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}\,.$$

Noem $T_{0,0}$ het resultaat dat bekomen wordt met $\Delta t = h$, en zij $T_{1,0}$ het resultaat dat bekomen wordt met $\Delta t = h/2$. Bereken de geëxtrapoleerde waarde $T_{1,1}$ en schrijf de numerieke methode op die overeenstemt met deze $T_{1,1}$.

Kun je nog een andere manier bedenken om tot dezelfde formule te komen?

Oplossing : er geldt

$$T_{0,0} = \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = a_0 + a_1\,h + \mathcal{O}(h^2)$$

en

$$T_{1,0} = \frac{f(t+h/2) - f(t)}{h/2} = a_0 + a_1\,\frac{h}{2} + \mathcal{O}(h^2)\,,$$

zodat (door eliminatie van de term in h^1 in $T_{0,0}$)

$$T_{1,1} = 2\,T_{1,0} - T_{0,0} = \frac{-f(t+h) + 4\,f(t+h/2) - 3\,f(t)}{h} = a_0 + \mathcal{O}(h^2)\,.$$

De methode die hierachter zit, is

$$f'(x) \approx \frac{-f(t+h) + 4\,f(t+h/2) - 3\,f(t)}{h}\,.$$

Ze wordt bvb. bekomen door $f(x)$ te interpoleren in $x = t$, $x = t + h/2$ en $x = t + h$ en vervolgens de interpolatieveelterm af te leiden en $x = t$ te stellen. De onderstaande commando's (zie `opl_oef3.mws`) doen het werk.

```
T[0,0]:=(f(x+h)-f(x))/h;
T[0,1]:=(f(x+h/2)-f(x))/(h/2);
factor(2*T[0,1]-T[0,0]);

with(CurveFitting):
punten :=[[t,f(t)],[t+h/2,f(t+h/2)],[t+h,f(t+h)]]:
p:=unapply(PolynomialInterpolation(punten, x),x):
simplify(D(p)(t));
series(%-D(f)(t),h,5);
```

4. Een kat wordt achtervolgd door een hond. De tactiek van de hond, die zijn uiterste best doet om die kat te pakken te krijgen, bestaat erin voortdurend in de richting van de kat te lopen. De snelheid van de hond is evenredig met de snelheid van de kat.

   Wiskundig vertaalt dit probleem zich als volgt : stel dat de banen van de kat en de hond respectievelijk beschreven worden door

   $$\overrightarrow{r_K}(t) = p(t)\,\overrightarrow{e_x} + q(t)\,\overrightarrow{e_y} \qquad \text{en} \qquad \overrightarrow{r_H}(t) = x(t)\,\overrightarrow{e_x} + y(t)\,\overrightarrow{e_y},$$

   dan is $\overrightarrow{r_H}'(t) = k\|\overrightarrow{r_K}'(t)\|\dfrac{\overrightarrow{r_K}(t) - \overrightarrow{r_H}(t)}{\|\overrightarrow{r_K}(t) - \overrightarrow{r_H}(t)\|}$.

   Los dit probleem op in de veronderstelling dat (i) de kat in tegenwijzerzin rondloopt op de eenheidscirkel, vertrekkend van het punt (1,0) en (ii) de hond vertrekt uit het punt $(0, -2)$. Gebruik de parameter k als inputwaarde (met defaultwaarde 2). Zet het integratie-interval op $[0, 15]$ (waarbij het programma allicht een fout-boodschap zal genereren op het ogenblik dat de hond de kat ingehaald heeft).

   Maak een plot van de banen in het geval $k = 1.1$ en $k = 2$. Schrijf ook uit na hoeveel tijd de hond de kat heeft ingehaald.

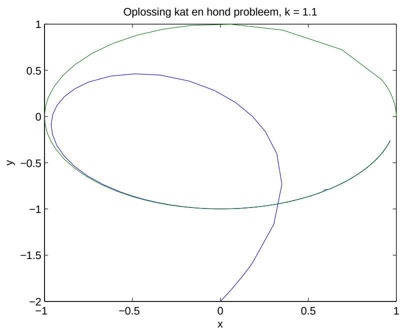
   Je kan vertrekken van het programma `vdpode.m`, dat o.a. te vinden is op Indianio.

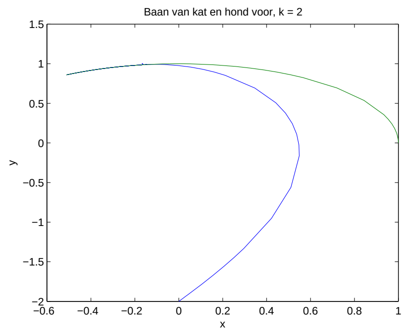
   Oplossing : de onderstaande code (zie `opl_oef4.m`) lost het probleem op.

```
function opl_oef4(k)
xposkat=inline('cos(t)');
yposkat=inline('sin(t)');
dxposkat=inline('-sin(t)');
dyposkat=inline('cos(t)');
if nargin < 1
  k = 2;     % default
end
tspan = [0; 15];
y0 = [0; -2];
options = odeset('Jacobian',@J);
[t,y] = ode15s(@f,tspan,y0,options);
figure;
plot(y(:,1),y(:,2),xposkat(t),yposkat(t));
title(['Baan van kat en hond voor k = ' num2str(k)]);
xlabel('x');
ylabel('y');
fprintf('De hond heeft de kat beet na %5.2f sec.\n',t(end));
```

```
function dydt = f(t,y)
p=xposkat(t); q=yposkat(t);
noem=sqrt((p-y(1))^2+(q-y(2))^2);
dp=dxposkat(t); dq=dyposkat(t);
tel=sqrt(dp^2+dq^2);
dydt = [ k*tel*(p-y(1))/noem
       k*tel*(q-y(2))/noem ];
end
% ------------------------------------------------------------------------
function dfdy = J(t,y)
p=xposkat(t); q=yposkat(t);
noem=sqrt((p-y(1))^2+(q-y(2))^2);
dp=dxposkat(t); dq=dyposkat(t);
tel=sqrt(dp^2+dq^2);
dfdy = [-k*tel/noem+k*tel/noem^3*(p-y(1))^2,k*tel/noem^3*(p-y(1))*(q-y(2))
       k*tel/noem^3*(p-y(1))*(q-y(2)),-k*tel/noem+k*tel/noem^3*(q-y(2))^2];
end
end
```

De onderstaande figuren tonen de banen voor $k = 1.1$ en $k = 2$. De hond haalt de kat in na resp. 6.02 en 2.11 seconden.





Schrijf uw oplossingen neer op papier. Plaats de bestanden die u eventueel gemaakt hebt om de vragen op te lossen op Minerva. Dit doet u door

- te surfen naar http://indianio/
- in te loggen met uw Minerva-username en -password
- uw bestanden te zippen tot 1 enkel bestand en up te loaden.

Zorg ervoor dat ik uit de naamgeving kan afleiden bij welke vraag elk bestand hoort.

Nog enkele tips :

- schrijf proper : het is de beste manier om te slijmen.
- probeer uw antwoorden bondig en correct te formuleren.
- heb je bij Maple en/of Matlab moeite met (de syntax van) bepaalde commando's, aarzel dan niet dit te vragen.