Examen Analyse III oefeningen

1. Bereken
$$\lim_{n\to\infty}\int_1^{\infty}\frac{\cos(x/n)}{x+x^2}\,dx \quad \text{en} \quad \lim_{n\to\infty}\int_0^{2}\frac{\sin(x/n)}{x+x^2}\,dx.$$

   Oplossing

   We trachten in beide gevallen gedomineerde convergentie te gebruiken. Voor het eerste integrandum hebben we de majorant $\frac{1}{x+x^2}$, die integreerbaar is op $[1,+\infty[$, want
$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x+x^2}=\int_1^{\infty}\Big(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\Big)\,dx=[\ln x-\ln(x+1)]_1^{\infty}=\Big[\ln\Big(\frac{x+1}{x}\Big)\Big]_{\infty}^{1}=\ln 2<+\infty.$$

   Het tweede integrandum is gedefinieerd en continu in $]0,2]$. Door de ongelijkheid $\sin x\le x$ (geldig op $[0,+\infty[$) hebben we de majorant $\frac{x}{x+x^2}=\frac{1}{x+1}$, die integreerbaar is op $[0,2]$, want $\int_0^2\frac{dx}{x+1}=\ln 3<+\infty$. Wegens gedomineerde convergentie is dus
$$\lim_{n\to\infty}\int_1^{\infty}\frac{\cos(x/n)}{x+x^2}\,dx=\int_1^{\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{\cos(x/n)}{x+x^2}\,dx=\int_1^{\infty}\frac{dx}{x+x^2}=\ln 2$$
   en
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2}\frac{\sin(x/n)}{x+x^2}\,dx=\int_0^{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(x/n)}{x+x^2}\,dx=0,$$
   vermits $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(x/n)}{x+x^2}=0$ voor elke $x>0$.

2. Verklaar of weerleg de aangeduide stappen in de volgende redenering:

   Stelling. Zij $X\subseteq\mathbb{R}^d$ Lebesgue-meetbaar en f een afbeelding $X\to\mathbb{R}$. Dan zijn equivalent:

   (a) voor elke $\varepsilon>0$ bestaat een meetbare $E\subseteq X$ met $\mu(E)\le\varepsilon$ en $f_{|X\setminus E}$ continu

   (b) f is Lebesgue-meetbaar.

   Bewijs. $\Rightarrow$: <u>voor elke $n\in\mathbb{N}$ vinden we $E_n\subseteq X$ met $\mu(E_n)\le 1/n$ en $f_{|E_n^c}$ continu</u> `[1]` ($E_n^c:=X\setminus E_n$). Dan is $f_{|A}$ continu, <u>en dus $f1_A$ meetbaar op X</u> `[2]`, voor elke meetbare $A\subseteq E_n^c$. Door $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}E_n^c$ te schrijven als $\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$ met A_n meetbaar en bevat in E_n^c `[3]` zien we dat ook $f1_{\bigcup_n E_n^c}\overset{[4]}{=}\sum_{n=1}^{\infty}f1_{A_n}$ <u>meetbaar is</u> `[5]`. Omdat $\mu\big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}E_n\big)\overset{[6]}{=}0$ is $f\overset{[7]}{=}f1_{\bigcup_n E_n^c}$ b.o., <u>zodat f meetbaar is</u> `[8]`.
   $\Leftarrow$: ... $\square$

   `[1-2]`, `[4-8]`: verklaar.
   `[3]`: waarom kunnen we $\bigcup_n E_n^c$ zo schrijven?

   Oplossingen

   [1] kies $\varepsilon:=1/n$ in (a).

   [2] als f continu is op A, dan is f meetbaar op A, en dus is $f1_A$ meetbaar op X.

   [3] we maken een opdeling van de E_n^c in disjuncte stukken (analoog als in de theorie): stel $A_1:=E_1^c$, $A_2:=E_2^c\setminus E_1^c$, ..., $A_n:=E_n^c\setminus(E_1^c\cup\cdots\cup E_{n-1}^c)$. Dan zijn A_n meetbaar (want alle E_n zijn meetbaar, en meetbare verzamelingen zijn gesloten onder eindige $\cup$, $\setminus$ en $.^c$) en $A_n\subseteq E_n^c$ voor elke $n\in\mathbb{N}$. Omdat $A_1\cup\cdots A_n=E_1^c\cup\cdots\cup E_n^c$ voor elke n, is $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}E_n^c$, en is $A_n\cap A_m=\varnothing$ als $n\ne m$.

[4] $f1_{\bigcup_n E_n^c} = f1_{\bigsqcup_n A_n} = \sum_{n=1}^{\infty} f1_{A_n}$. De tweede gelijkheid volgt omdat

$$f1_{\bigsqcup_n A_n}(x) = f(x) \iff x \in \bigsqcup_n A_n \iff \sum_{n=1}^{\infty} f1_{A_n}(x) = f(x),$$

vermits de A_n disjunct zijn. Als $x \notin \bigsqcup_n A_n$, dan zijn beide leden 0.

[5] Vermits de som van twee meetbare afbeeldingen $X \to \mathbb{R}$ meetbaar is, is inductief $\sum_{n=1}^{N} f1_{A_n}$ meetbaar voor alle N. Vermits de limiet van een rij van meetbare afbeeldingen meetbaar is, is ook $\sum_{n=1}^{\infty} f1_{A_n} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f1_{A_n}$ meetbaar (vermits de limiet bestaat op heel X).

[6] $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n \subseteq E_m$, zodat $\mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n) \leq \mu(E_m) \leq 1/m$, voor elke $m \in \mathbb{N}$.

[7] de verzameling van uitzonderingspunten is bevat in $(\bigcup_n E_n^c)^c = \bigcap_n E_n$, en is dus een nulverzameling.

[8] $f = g$ b.o. en g meetbaar impliceert dat f meetbaar is.

3. Zij $(\mathbb{R}, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte met $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{A}$. Toon aan dat $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu)$ een maatruimte is, als

$$\nu(E) := \mu\Big(\bigcup_{n\in E} [n, n+1[\Big).$$

Oplossing

Omdat $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{A}$, is $\bigcup_{n\in E} [n, n+1[$ steeds μ-meetbaar, zodat $\nu(E) \in [0, +\infty]$ goed gedefinieerd is voor elke $E \subseteq \mathbb{N}$.

(a) $\nu(\varnothing) \overset{\text{(def.)}}{=} \mu(\varnothing) = 0$ door de corresponderende eigenschap van de maat μ.

(b) σ-additiviteit:

$$\begin{aligned}\nu\Big(\bigsqcup_{m\in\mathbb{N}} E_m\Big) = \mu\Big(\bigcup_{n\in\bigsqcup_m E_m} [n, n+1[\Big) &= \mu\Big(\bigsqcup_{m\in\mathbb{N}} \bigsqcup_{n\in E_m} [n, n+1[\Big) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \mu\Big(\bigcup_{n\in E_m} [n, n+1[\Big) = \sum_{m=1}^{\infty} \nu(E_m)\end{aligned}$$

door de σ-additiviteit van μ.

4. Geef een voorbeeld van een dalende rij van Lebesgue-meetbare verzamelingen $A_n \subseteq \mathbb{R}^d$ waarvoor $\mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) \neq \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

Oplossing

Wegens een eigenschap uit de theorie weten we dat tegenvoorbeelden zich enkel kunnen voordoen als $\mu(A_1) = +\infty$, en analoog, door de rij $(A_m, A_{m+1}, A_{m+2}, \dots)$ te beschouwen, moet in feite $\mu(A_m) = +\infty$ voor elke m, zodat ook $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = +\infty$. We zoeken dus een voorbeeld waarvoor $\mu(A_m) = +\infty$ voor alle m, maar toch $\mu(\bigcap_{m\in\mathbb{N}} A_m) < +\infty$. Bijvoorbeeld $A_m := \mathbb{R}^d \setminus B(0, m)$ voldoet, want $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} B(0, m) = \mathbb{R}^d$, zodat $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} A_m = \varnothing$, en dus $\mu(\bigcap_{m\in\mathbb{N}} A_m) = 0$, terwijl $\mu(A_m) = +\infty$ voor elke m.

5. Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte. Zij $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$ en f een integreerbare afbeelding $X \to \overline{\mathbb{R}}$.

   (a) Zij $\int_E f \geq 0$ voor elke $E \in \mathcal{A}$. Toon aan dat $f \geq 0$ b.o.
   HINT: Gebruik de annihilatie-eigenschap uit de theorie (of gebruik dezelfde techniek als in het bewijs van die eigenschap).

(b) Zij $\mu(X) < +\infty$ en zij $\left|\int_E f\right| \leq c\mu(E)$, voor elke $E \in \mathcal{A}$. Toon aan dat $|f| \leq c$ b.o.

HINT: Gebruik deel (a) (of gebruik een gelijkaardig argument).

(c) Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ σ-eindig en zij $\left|\int_E f\right| \leq c\mu(E)$, voor elke $E \in \mathcal{A}$ met $\mu(E) < +\infty$. Toon aan dat $|f| \leq c$ b.o.

HINT: Gebruik deel (b).

Oplossing

(a) Methode 1: gebruik de annihilatie-eigenschap.
Uit het gegeven volgt dat $\int_{\{f<0\}} f \geq 0$. Maar ook

$$\int_{\{f<0\}} f \leq \Big(\sup_{\{f<0\}} f\Big)\mu(\{f<0\}) \leq 0,$$

zodat $\int_{\{f<0\}} f = 0$, en dus ook $\int_{\{f<0\}} |f| = -\int_{\{f<0\}} f = 0$. Door de annihilatie-eigenschap is dus $f = 0$ b.o. op $\{f < 0\}$. Dus is $\mu(\{f < 0\}) = 0$, d.w.z., $f \geq 0$ b.o.

Methode 2: gebruik dezelfde techniek als in het bewijs van de annihilatie-eigenschap. Zij $n \in \mathbb{N}$. Dan is

$$0 \leq \int_{\{f<-1/n\}} f \leq \int_{\{f<-1/n\}} -\frac{1}{n} \leq -\frac{1}{n}\mu(\{f < -1/n\}).$$

Bijgevolg is $\mu(\{f < -1/n\}) = 0$. Omdat n willekeurig is, is dus ook $\mu(\{f < 0\}) = \mu\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{f < -1/n\}\big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{f < -1/n\}) = 0$, d.w.z., $f \geq 0$ b.o.

(b) Door het gegeven is

$$-\int_E c = -c\mu(E) \leq \int_E f \leq c\mu(E) = \int_E c.$$

Omdat $c\mu(E) \leq c\mu(X) < +\infty$, zijn f en c integreerbaar over E, zodat

$$\int_E (c - f) = \int_E c - \int_E f \geq 0 \quad \text{en} \quad \int_E (f + c) = \int_E f + \int_E c \geq 0.$$

Omdat dit geldt voor elke $E \in \mathcal{A}$, is dus $f + c \geq 0$ b.o. en $c - f \geq 0$ b.o. wegens deel (a). Bijgevolg is $|f| \leq c$ b.o. (want $\{|f| \nleq c\} = \{f + c < 0\} \cup \{c - f < 0\}$ is een nulverzameling).

(c) $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ met $\mu(X_n) < +\infty$, voor elke n. Op de deelruimte X_n kunnen we nu deel (b) toepassen, want voor elke $E \in \mathcal{A}$, $E \subseteq X_n$ is ook $\mu(E) < +\infty$, zodat door het gegeven $\left|\int_E f\right| \leq c\mu(E)$. Er volgt dat $|f| \leq c$ b.o. op X_n, voor elke $n \in \mathbb{N}$. Dan is ook $|f| \leq c$ b.o. op X (want $\{|f| > c\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\{|f| > c\} \cap X_n)$ is een nulverzameling).