Examen Analyse III oefeningen

1. Gegeven een Lebesgue-meetbare afbeelding $f\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ met de eigenschap dat $\int_{\mathbb{R}} x\, f(x)\, dx < +\infty$. Toon aan dat

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^2} n \arctan\left(\frac{f(x)}{n}\right) e^{-\left(\frac{y}{x}\right)^2}\, dx\, dy = \sqrt{\pi} \int_{\mathbb{R}} x\, f(x)\, dx.$$

2. Verklaar of weerleg de aangeduide stappen in de volgende redenering:

   Stelling. Zij $E \subseteq \mathbb{R}^d$ Lebesgue-meetbaar met $\mu(E) < +\infty$. Zij f een Lebesgue-meetbare afbeelding $E \to \mathbb{R}$. Dan bestaat voor elke $\varepsilon > 0$ een open $V \subseteq E$ met $\mu(V) \le \varepsilon$ en $f_{|E\setminus V}$ continu.

   Bewijs. (a) Zij $f = 1_A$, met $A \subseteq E$ Lebesgue-meetbaar. Zij $\varepsilon > 0$. Wegens de structuurstelling voor Lebesgue-meetbare verzamelingen bestaat een gesloten $F \subseteq A$ en een open $U \supseteq A$ met $\mu(U \setminus F) \overset{[1]}{\le} \overline{\mu}(U \setminus A) + \overline{\mu}(A \setminus F) \le \varepsilon$.
   We tonen aan dat $f_{|E\setminus(U\setminus F)}$ continu is. Als $x \in A$, dan is $f(x) = 1$. Omdat U open is, bestaat $r > 0$ zo dat $B(x, r) \subseteq U$. Dan is ook $\underline{y \in A}$ `[2]` voor elke $y \in B(x, r) \cap E \setminus (U \setminus F)$, zodat f continu is in x. Analoog is f ook continu in x als $x \notin A$. `[3]`
   (b) Zij $f = \sum_{k=1}^{n} a_k 1_{E_k}$ simpel. Zij $\varepsilon > 0$. Wegens deel (a) vinden we open V_k met $\mu(V_k) \le \varepsilon$ en $1_{E_k|E\setminus V_k}$ continu. Stel $V := \bigcup_{k=1}^{n} V_k$. Dan is $\underline{\mu(V) \le k\varepsilon}$`[4]` en $\underline{f_{|E\setminus V} \text{ is continu}}$`[5]`.
   (c) Zij f willekeurig. Zij $\varepsilon > 0$. Dan is $f = \lim_n s_n$ puntsgewijs, voor zekere simpele afbeeldingen $s_n\colon E \to \mathbb{R}$. Wegens deel (b) bestaan open V_n met $\mu(V_n) \le \varepsilon/2^n$ en $s_{n|E\setminus V_n}$ continu. Wegens de stelling van Egorov bestaat $A \subseteq E$ met $\mu(A) \le \varepsilon$ zo dat $s_n \rightrightarrows f$ op $E \setminus A$. Wegens de structuurstelling bestaat een open $U \supseteq A$ met $\underline{\mu(U) \le 2\varepsilon}$`[6]`. Noem $V := \bigcup_n V_n$. Door overdracht van continuïteit bij gelijkmatige convergentie (cursus Analyse I)[1] is $\underline{f_{|E\setminus(U\cup V)} \text{ continu}}$`[7]`. Bovendien is $\mu(U \cup V) \overset{[8]}{\le} \mu(U) + \sum_n \mu(V_n) \overset{[9]}{\le} 3\varepsilon$. □

   `[1-2, 4-9]`: verklaar.
   `[3]`: hoe volgt het te bewijzen voor $f = 1_A$ hieruit?

3. Zij $(X, \mathcal{A}, \mu_n)$ een maatruimte voor elke $n \in \mathbb{N}$. Definieer $\mu(E) := \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n(E)$. Toon aan dat $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte is.

4. Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte. Zij f_n een integreerbare afbeelding $X \to \mathbb{R}$ voor elke $n \in \mathbb{N}$. Neem aan dat $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_X |f_n| < +\infty$.

   (a) Toon aan dat $\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n|$ integreerbaar is.
   (b) Toon aan dat $\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(x)| < +\infty$ voor bijna alle $x \in X$.
   HINT: Gebruik deel (a).
   (c) Toon aan dat $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ convergeert in $\mathbb{R}$ voor bijna alle $x \in X$.
   HINT: Gebruik deel (b).
   (d) Toon aan dat $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ integreerbaar is en dat

$$\int_X \sum_{n=1}^{+\infty} f_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_X f_n\,.$$

---
[1] Dit blijft geldig op deelverzamelingen van $\mathbb{R}^d$ (met analoog bewijs).