Statistische Fysica 1: 24 januari 2011

THEORIE

- Start van een passende vorm van de partitiefunctie om een uitdrukking af te leiden voor de entropie van een KLASSIEK EN IDEAAL GAS in drie dimensies. Duid alle stappen in je redenering. Je kunt gebruik maken van de uitdrukking

  $$f(p)dp = \frac{V}{h^3} d\vec{p} \, ,$$

  en de onderstaande integralen.

- De partitiefunctie voor fotonen wordt gegeven door

  $$Z_{ph}(T,V) = \prod_{r=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \exp\left(-\beta \epsilon_r\right)}$$

  Start van deze uitdrukking om de stralingswet van Planck af te leiden. Duid alle stappen in je redenering.

Gaussische Integralen

$$I_n(a) = \int_0^{\infty} dx x^n e^{-ax^2} \qquad \text{met, } n \in \{0, 1, 2, \ldots\} \; . \tag{1}$$

$$I_0(a) = \int_0^{\infty} dx e^{-ax^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \; . \tag{2}$$

$$\begin{aligned} I_2(a) &= -\frac{dI_0(a)}{da} = \frac{1}{4a}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \\ I_4(a) &= +\frac{d^2 I_0(a)}{da^2} = \frac{3}{8a^2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \; . \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} I_1(a) &= -\frac{1}{2a}\int_0^{+\infty} de^{-ax^2} = \frac{1}{2a} \\ I_3(a) &= -\frac{1}{2a}\int_0^{+\infty} x^2 de^{-ax^2} = \frac{1}{a} I_1(a) = \frac{1}{2a^2} \; . \end{aligned} \tag{4}$$

OEFENINGEN

BIJ HET OPLOSSEN VAN DE OEFENINGEN KUN JE JE CURSUS GEBRUIKEN!

OEFENING 1 (10 PUNTEN)

Beschouw een ideaal Bose gas van niet-relativistische deeltjes met spin $S = 1$ met massa m in een **vier-dimensionale wereld**. Het gas bevat N deeltjes binnen een vier-dimensionaal volume V_4. Een volume in een vier-sfeer met straal R wordt gegeven door

$$V_4 = \frac{(2\pi)^2 R^4}{8}$$

1. Toon aan dat er voor de hierboven geschetste condities wel degelijk Bose-Einstein condensatie optreedt. Bepaal een uitdrukking voor de kritische temperatuur T_c in termen van N, V_4, m en de constante van Planck.

2. Bepaal een uitdrukking voor de soortelijke warmte C_V van het beschouwde Bose gas voor $T < T_c$. Ga na of je eindresultaat compatibel is met de derde hoofdwet.

3. Bepaal een uitdrukking voor de soortelijke warmte C_V van het beschouwde Bose gase voor EXTREEM hoge temperaturen. Maak hierbij gebruik van een goed gekozen expansie waarbij de laagste-orde term het klassiek resultaat reproduceert. Bepaal ook de eerste-orde kwantummechanische correctie op het klassiek resultaat. Hogere-orde correcties kun je verwaarlozen.

Bij de berekeningen kun je de volgende integralen nuttig vinden:

$$\int_0^\infty \frac{x dx}{(e^x - 1)} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(e^x - 1)} = 2.404$$

$$\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{(e^x - 1)} = \frac{\pi^4}{15}$$

OEFENING 2 (10 PUNTEN)

EXCITON DISSOCIATIE IN EEN HALFGELEIDER

Door een intense laser op een halfgeleider te richten kan men een metastabiele toestand genereren. De metastabiele toestand wordt gecreëerd uit elektronen (lading $-e$ en effectieve massa m_e), en zogenaamde "gaten" (lading $+e$ en effectieve massa m_h) in het volume V van de halfgeleider. De tegengesteld geladen elektronen en gaten kunnen ofwel paren vormen van elektrisch neutrale deeltjes (zoals een proton en een elektron in het waterstofatoom), ofwel als "vrije" deeltjes blijven bestaan. De elektron-gat paren noemt men EXCITONEN. We beschouwen hier een zeer eenvoudig model voor het proces onder studie.

1. Bepaal de vrije energie van het gas van N_e elektronen en N_h gaten bij een temperatuur T. **Behandel de elektronen en gaten als een KLASSIEK GAS van VRIJE DEELTJES.** Bepaal ook de chemische potentiaal van de elektronen (μ_e) en de gaten (μ_h).

2. Door een exciton te vormen kan het elektron-gat paar zijn energie verlagen. De bindingsenergie wordt gegeven door

   $$W = \frac{\mu e^4}{2\hbar^2 \epsilon^2} ,$$

   met ϵ de diëelktrische constante en μ de gereduceerde massa

   $$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_e} + \frac{1}{m_h} .$$

   Bepaal de vrije energie van de N_p excitonen. **Behandel de excitonen als een KLASSIEK GAS van VRIJE DEELTJES met massa $m_p = m_e + m_h$.** Bepaal ook de chemische potentiaal μ_p van de excitonen.

3. Vind een criterium dat het evenwicht uitdrukt van het elektron-gat-exciton systeem.

4. Bepaal de dichtheid aan excitonen (ρ_p) in termen van de dichtheid aan elektronen en gaten (ρ_e en ρ_h).

Oefening 1 ~~[illegible]~~ 10-11 - Zit 1

> Ideaal Bose gas in vier dimensies!

i) Dichtheid der toestanden in vier dimensies!

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 + k_u^2\right)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m}(2\pi)^2\left(\frac{1}{\lambda_x^2} + \frac{1}{\lambda_y^2} + \frac{1}{\lambda_z^2} + \frac{1}{\lambda_\mu^2}\right)$$

Staande golven in een vier-dimensionaal volume met lengte L

$$n\frac{\lambda}{2} = L$$

$$E = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{(2\pi)^2}{(2L)^2}\left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 + n_u^2\right)$$

$$= \frac{h^2}{2m\,4L^2}\left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 + n_u^2\right)$$

$$V_4 = L^4 \qquad E = \frac{h^2}{2m\,4\,V_4^{1/2}}\left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 + n_u^2\right)$$

$$\boxed{E = \frac{h^2}{8m V_4^{1/2}} \left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 + n_u^2\right)}$$

Number of states in four dimensions with $|\underset{\sim}{k}| \leq k$

$$\Gamma^{(4)}(k) = \frac{1}{2^4} \frac{\frac{(2\pi)^2 k^4}{8}}{\left(\frac{\pi}{L}\right)^4}$$

$$= \frac{1}{2^4} \frac{(2\pi)^2 k^4}{\cancel{\pi^4}\, 8} \times \frac{L^4}{\pi^4}$$

$$g^{(4)}(k)\, dk = \frac{1}{\cancel{2^4}} \frac{(\cancel{2}\pi)^{\cancel{2}}\, 4 k^3\, dk}{8 \times \cancel{4}} \times \frac{V}{\cancel{\pi^4}\, \pi^2}$$

$$\boxed{g^{(4)}(k)\, dk = \frac{V}{8\pi^2} k^3\, dk}$$

$$E = \hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \qquad k = \frac{(2m)^{1/2}}{\hbar} \varepsilon^{1/2}$$

$$g^{(4)}(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{V}{8\pi^2} \frac{(2m)^{3/2} \varepsilon^{\cancel{3/2}}}{\hbar^3} \frac{(2m)^{1/2}}{\hbar} \frac{1}{2\, \cancel{\varepsilon^{1/2}}}\, d\varepsilon$$

$$\boxed{g^{(4)}(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{V}{16\pi^2} \frac{(2m)^2}{\hbar^4} \varepsilon\, d\varepsilon} = \frac{V \pi^2 \cancel{\pi^4}\, \cancel{2^4}}{\cancel{2^4}\, \cancel{\pi^2}} \frac{4m^2 \varepsilon\, d}{h^4} \ldots$$

$$dN(\varepsilon) = (2S+1) \frac{V}{16\pi^2} \frac{(2m)^2}{\hbar^4} \frac{1}{\left(\exp\beta(\varepsilon-\mu) - 1\right)} \varepsilon \, d\varepsilon$$

$$\frac{N}{V} = (2S+1) \frac{1}{16\pi^2} \frac{(2m)^2}{\hbar^4} \int_0^\infty \frac{\varepsilon \, d\varepsilon}{\exp\beta(\varepsilon-\mu) - 1}$$

$$\mu(T_c) = 0$$

or T_c from

$$\frac{N}{V} = (2S+1) \frac{1}{16\pi^2} \frac{(2m)^2}{\hbar^4} \int_0^\infty \frac{\varepsilon \, d\varepsilon}{\exp\frac{\varepsilon}{kT_c} - 1}$$

$$\boxed{\frac{N}{V_4} = (2S+1) \frac{1}{16\pi^2} \frac{(2m)^2}{\hbar^4} (kT_c)^2 \underbrace{\int_0^\infty \frac{x \, dx}{(e^x - 1)}}_{} = \frac{\pi^2}{6}}$$

(solution to 1. $\boxed{T_c = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{N}{2V} \frac{h^2}{\pi^2 m k}}}$

2. $T \gtrsim T_c$: chemische potentiaal is klein en ~~positief~~ negatief.

$$\Phi = -kT \ln Z$$

$$= -kT \int d\varepsilon \ln \frac{1}{\exp\beta(\varepsilon-\mu) - 1} \, f^{(u)}(\varepsilon)(2S+1,$$

$$= kT \int_0^\infty d\varepsilon \, \frac{V\pi^2}{h^4} 4m^2 \varepsilon \ln\left(e^{\beta\varepsilon} e^{-\beta\mu} - 1\right.$$

Oefening 1 ; 2e deel

$$\bar{E} = \int_0^\infty dN(\varepsilon)\,\varepsilon = (2S+1)\frac{V}{16\pi^2}\frac{(2m)^2}{\hbar^4}\int \frac{\varepsilon^2\, d\varepsilon}{e^{\beta\varepsilon}-1}$$

$$= (2S+1)\frac{V}{16\pi^2}\frac{(2m)^2}{\hbar^4}\frac{1}{\beta^3}\underbrace{\int\frac{x^2\,dx}{e^x-1}}_{2.404}$$

$$\bar{E} = (2S+1)\frac{V}{16\pi^2}\frac{(2m)^2}{\hbar^4}(kT)^3\; 2.404$$

$$C_V = \frac{\partial \bar{E}}{\partial T} = (2S+1)\frac{V}{16\pi^2}\frac{(2m)^2}{\hbar^4}\, k^3\, 3T^2 \times 2.404$$

$$\boxed{C_V = (2S+1)\frac{V}{4\pi^2}\frac{m^2}{\hbar^4}\,3k^3T^2 \times 2.404}$$

met $\dfrac{N}{V} = (2S+1)\dfrac{1}{16\pi^2}\dfrac{(2m)^2}{\hbar^4}(kT_c)^2 \times \dfrac{\pi^2}{6}$

$$C_V = \frac{N}{(\cancel{k}T_c)^2}\frac{6}{\pi^2}\,\cancel{k^3}\,3\,T^2 \times 2.404$$

$$\boxed{\frac{C_V}{Nk} = \frac{18\times 2.404}{\pi^2}\left(\frac{T}{T_c}\right)^2}$$

Oefening 1 3^e deel

$$\Phi = -kT \ln \mathcal{Z} \quad ; \quad \mathcal{Z} = \prod_i \mathcal{Z}_i^{BE} = \prod_i \frac{1}{1 - \exp\beta(\mu-\varepsilon_i)}$$

i) $$\Phi = \int dp \, f(p) \, (2S+1) \, (kT) \ln\left(1 - z e^{-\beta\varepsilon_p}\right)$$

$$= \int_0^\infty d\varepsilon \, \underbrace{f^{(u)}(\varepsilon)}_{u\,\zeta\,\varepsilon} \, (2S+1) \, (kT) \ln\left(1 - z e^{-\beta\varepsilon}\right)$$

$$= \zeta \int_0^\infty d(\varepsilon\beta)(\varepsilon\beta)(2S+1)\,(kT)^3 \ln\left(1 - z e^{-\beta\varepsilon}\right)$$

$$\boxed{\Phi = \zeta (kT)^3 (2S+1) \underbrace{\int_0^\infty dx \; x \ln\left(1 - z e^{-x}\right)}_{I_1}}$$

ii) $$\bar{N} = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mu}\right)_{T,V} = -\zeta (kT)^3 (2S+1) \frac{\partial z}{\partial \mu}$$

$$\times \int_0^\infty dx \, \cancel{x} \, \frac{1}{1 - z e^{-x}} (-1) e^{-x}$$

$$\boxed{\bar{N} = \zeta (kT)^2 (2S+1) \, z \underbrace{\int_0^\infty dx \; x \frac{1}{(e^x - z)}}_{I_2 = -\frac{\partial I_1}{\partial z}}}$$

$$I_1 = \int_0^\infty dx \; x \ln(1 - z e^{-x})$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$$

$T \gg$; $\mu \to -\infty$ $\checkmark$ $z \ll$

$$I_1 \cong \int_0^\infty dx \; x \left[(-z e^{-x}) - \frac{z^2 e^{-2x}}{2} \right]$$

$$= -z \int_0^\infty dx \; x e^{-x} - \frac{z^2}{2} \int_0^\infty \frac{d(2x)(2x) e^{-2x}}{4}$$

$$\int_0^\infty dx \; x e^{-x} = -\int_0^\infty (d e^{-x}) x = -x e^{-x} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^\infty = 1$$

$$\boxed{I_1 = -z - \frac{z^2}{8}}$$

$$\Phi = \mathcal{C} (kT)^3 (2S+1) \left[-z - \frac{z^2}{8} \right]$$

$$\boxed{I_2 = -\frac{\partial I_1}{\partial z} = 1 + \frac{2z}{8}}$$

$$\overline{N} \cong \mathcal{C} (kT)^2 (2S+1) \, z \left(1 + \frac{2z}{8} \right)$$

$$\left(\frac{4 \overline{N}}{\mathcal{C} (kT)^2 (2S+1)} \right)^{\mathcal{C}_2} = 4z + \frac{z^2}{4}$$

$$z^2 + 4z - \mathcal{C}_2 = 0$$

$$z = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 4\mathcal{C}_2}}{2}$$

$$z = \frac{-4 \pm 4\sqrt{1 + \mathcal{C}_2/4}}{2}$$

$$z = -2 + 2\sqrt{1 + \frac{N}{3V}\frac{h^4}{k^2T^2(2m)^2\pi^2}}$$

$$\boxed{z = -2 + 2\sqrt{1 + \mathcal{C}_2/4}} \qquad 0 \leq z \leq 1\,!$$

$$z = -2 + 2\sqrt{1 + \frac{1}{\cancel{4}}\frac{\cancel{4}N}{(2s+1)}\frac{\cancel{16\pi^2}\,\cancel{k^4}\,h^4}{\cancel{k^2}\,k^2T^2\,V\,(2m)^2\,\cancel{16\pi^4}\,\pi^2}}$$

$$\Phi = \mathcal{C}(kT)^3(2s+1)\left(-z - \frac{z^2}{8}\right)$$

$$= -PV = -\frac{V}{16\pi^2}\frac{(2m)^2}{h^4}(2s+1)\left(z + \frac{z^2}{8}\right)(kT)^3$$

$$\frac{P}{kT} = \frac{3}{\lambda^4}\left(z + \frac{z^2}{8}\right)$$

$$\boxed{P = \cancel{\frac{1}{16\pi^2}}\frac{4m^2}{h^4}\cancel{16\pi^4}\,\pi^2(2s+1)\left(z + \frac{z^2}{8}\right)(kT)^3}$$

with $z = -2 + 2\sqrt{1 + \frac{N}{3V}\frac{h^4}{k^2T^2(2m)^2\pi^2}}$

$$z = -2 + 2\sqrt{1 + \frac{N}{3V}\left(\frac{h^2}{2\pi mkT}\right)^2} = -2 + 2\sqrt{1 + \frac{N}{3V}\lambda^4}$$

$$= -2 + 2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{N}{3V}\lambda^4 + \frac{1}{2!}\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{N}{3V}\lambda^4\right)^2\right)$$

$$\boxed{z \simeq \frac{N}{3V}\lambda^4 - \frac{1}{8}\left(\frac{N\lambda^4}{3V}\right)^2} \quad \text{or} \quad z \simeq \frac{N\lambda^4}{3V}\left(1 - \frac{1}{4}\left(\frac{N\lambda^4}{3V}\right)\right)$$

or $z = z_0 \left(1 - \frac{1}{4} z_0\right)$

$$P \simeq \frac{4m^2\pi^2(2S+1)}{h^4} (kT)^3 z_0 \left(1 - \frac{1}{4} z_0\right) \left(1 + \frac{z_0}{8}\left(1 - \frac{1}{4} z_0\right)\right)$$

$$\simeq \frac{4m^2\pi^2}{h^4} (2S+1) (kT)^3 \left(z_0 - \frac{z_0^2}{4}\right)\left(1 + \frac{z_0}{8}\left(1 - \frac{1}{4} z_0\right)\right)$$

$$\simeq \frac{4m^2\pi^2}{h^4} (2S+1) (kT)^3 \left(z_0 - \frac{z_0^2}{4} + \frac{z_0^2}{8}\right)$$

$$\simeq \frac{4m^2\pi^2}{h^4} (2S+1) (kT)^3 z_0 \left(1 - \frac{z_0}{8}\right)$$

$$P \simeq \cancel{\frac{4m^2\pi^2}{h^4}} (\cancel{2S+1}) (kT)^{\cancel{4}} \frac{N}{\cancel{3}V} \frac{\cancel{h^4}}{\cancel{(2\pi m kT)^2}} \left(1 - \frac{1}{4} \frac{N}{3V} \frac{h^4}{(2\pi m kT)^2}\right)$$

$$\boxed{P \simeq (kT)\left(\frac{N}{V}\right)\left(1 - \frac{1}{4} \frac{N}{3V} \frac{h^4}{(2\pi m kT)^2}\right)}$$

$E_{NR} \sim \frac{1}{L^2} = \frac{1}{V^{1/2}}$ $\leadsto$ $\frac{\partial E_{NR}}{\partial V} \sim \frac{1}{2} \frac{E_{NR}}{V}$

$PV = \frac{1}{2} E$ in 4 dimensions

$$\bar{E} = N 2kT \left(1 - \frac{1}{4} \frac{N}{3V} \frac{h^4}{(2\pi m kT)^2}\right)$$

$$C_V = 2Nk \left(1 - \frac{1}{4} \frac{N}{3V} \frac{h^4}{(2\pi m kT)^2} (-1)\right)$$

$$\boxed{C_V = 2Nk \left(1 + \frac{1}{4} \frac{N\lambda^4}{3V}\right)}$$