Academiejaar 2010-2011, 21 januari 2011, 8.30u

Vaagheids- en Onzekerheidsmodellen

Schrijf je naam bovenaan elk antwoordblad. Schrijf niet met potlood of in het rood op je antwoordbladen. Los elke (deel)vraag afzonderlijk op. Vermeld duidelijk het nummer van de (deel)vraag bij elk antwoord. Indien je een (deel)vraag niet beantwoordt, vermeld dan ook duidelijk het nummer van deze (deel)vraag samen met de melding "geen antwoord". Geef enkel je antwoordbladen af. Kladpapier en opgave mag je houden.

---

1. Ga je akkoord met de volgende uitspraak of niet? Staaf je antwoord met een bewijs of een tegenvoorbeeld.

   "Een begrensde tralie is dan en slechts dan compleet indien elke niet-ledige deelverzameling een infimum heeft."

2. Zij T een linkscontinue t-norm en zij I_T zijn residuele implicator, zoals gewoonlijk gedefinieerd als $I_T(x,y) = \sup\{\lambda \mid \lambda \in [0,1] \text{ en } T(x,\lambda) \leq y\}$ voor alle x en y in $[0,1]$. De bijhorende bi-implicator $\overset{\leftrightarrow}{T}$ wordt dan gedefinieerd als $\overset{\leftrightarrow}{T}(x,y) = T(I_T(x,y), I_T(y,x))$.

   (a) Toon de volgende eigenschappen aan:

   $$\overset{\leftrightarrow}{T}(x,y) = \min(I_T(x,y), I_T(y,x)) \quad \text{en} \quad \overset{\leftrightarrow}{T}(x,y) = I_T(\max(x,y), \min(x,y))$$

   Indien je gebruikt maakt van eigenschappen van t-normen en/of implicatoren, gelieve die dan ook te bewijzen.

   (b) Bepaal de bi-implicator die behoort bij het minimum, d.w.z. leid een uitdrukking af voor $\overset{\leftrightarrow}{T}_M$.

3. Zij X een willekeurig universum. De concentratiebewerking *con* is een $\mathcal{F}(X) - \mathcal{F}(X)$ afbeelding die gedefinieerd is als $(con\ A)(x) = (A(x))^2$ voor alle A in $\mathcal{F}(X)$ en alle x in X. Deze bewerking wordt soms gebruikt als representatie van de linguïstische wijziger *zeer*. Negatie wordt anderzijds typisch voorgesteld aan de hand van het complement m.b.t. tot een negator[1] N, gedefinieerd als $(co_N(A))(x) = N(A(x))$ voor alle A in $\mathcal{F}(X)$ en alle x in X. Een samengestelde term zoals "*niet zeer juist*" wordt dan voorgesteld als $co_N(con\ A)$ waarbij A de vaagverzameling voor *juist* is. Op analoge wijze is $con(co_N A)$ dan de voorstelling van de term "*zeer onjuist*". Gelden onderstaande eigenschappen? Geef telkens een bewijs of een tegenvoorbeeld.

   (a) $co_N(con\ A) \subseteq con(co_N A)$

   (b) $co_N(con\ A) \supseteq con(co_N A)$

4. (a) Formuleer en bewijs de karakterisatie van een convexe vaagverzameling in $\mathbb{R}^3$ in termen van haar zwakke niveauverzamelingen.

[1] Een negator N is een dalende $[0,1] - [0,1]$ afbeelding zodat $N(0) = 1$ en $N(1) = 0$.

(b) Is deze karakterisatie nog geldig voor de sterke niveauverzamelingen? Leg uit.

5. Beschouw de vaaggrootheden A en B gegeven door

$$A(x) = \begin{cases} x/2, & \text{als } x \in [0,2] \\ 1, & \text{als } x \in [3,4] \\ 0, & \text{anders} \end{cases}$$

en $B = \{(1/2, 1/2), (1, 1/2)\}$. Het W-product van deze vaaggrootheden is gedefinieerd als

$$(A \odot_W B)(z) = \begin{cases} \sup\{W(A(x), B(y)) \mid x \cdot y = z\}, & \text{als } z \in wd(\cdot) \\ 0, & \text{anders} \end{cases}$$

waarbij W de Lukasiewicz t-norm is, t.t.z. $W(x,y) = \max(x + y - 1, 0)$ voor alle x en y in $[0,1]$.

Bepaal $A \odot_W B$ en stel het resultaat grafisch voor.

Veel succes!