1ste Ba Wiskunde — 10.VI.2011

Wiskundige Analyse II, theorie (= 55% van de punten)

- *Beantwoord elk van de vragen met een Romeins cijfer op één van de dubbele geruite bladen. Schrijf op elk van die dubbele geruite bladen bovenaan uw naam en het Romeinse cijfer van de vraag. De ongeruite bladen dienen voor het klad en moeten niet ingediend worden, evenmin als het blad met de opgaven.*
- *De bewijzen moeten niet langer of explicieter zijn dan in de cursus, en alles wat er in de cursus aan voorafgaat mag zonder meer gebruikt worden. Staat er in de cursus 'analoog' of 'wegens de stelling van X', dan mag u dat ook zo schrijven.*
- *Vraag toelichting bij opgaven die vreemd of onduidelijk overkomen.*

Deel A

Vraag I.

1. Definieer (i) *open deelverzameling* van het vlak; (ii) *open gebied* van het vlak; (iii) *wervelvrij vectorveld* in het vlak.
2. Vul aan (GEEN BEWIJS): $\left(\int_a^x f\right)' = \ldots$ *als* $\ldots$
3. Formuleer en bewijs de Eerste Hoofdstelling voor lijnintegralen. Maak ook een figuur.
4. Formuleer (GEEN BEWIJS) de Stelling van Green.
5. Vul aan en bewijs: *is* (P, Q) *een ... vectorveld in ..., dan*

   (P, Q) *wervelvrij* $\Longrightarrow$ *... van een ... scalairenveld ...* $\Longrightarrow$ $(\ldots = \ldots)$ $\Longrightarrow$ (P, Q) *wervelvrij*

NIEUW DUBBEL BLAD

Vraag II. In de stelling van Stokes komen te pas: een parametervoorstelling van het oppervlak, nl. $\varphi : K \to \mathbb{R}^3$, en een parametervoorstelling voor $(\partial K)_+$, nl.

$$u = \omega_1(t), \quad v = \omega_2(t) \qquad (a \leqslant t \leqslant b).$$

1. Geef een parametervoorstelling voor $(\partial\Sigma)_+$.
2. Schrijf $\oint_{(\partial\Sigma)_+} P(x, y, z)\, dx$ als een gewone integraal van één veranderlijke.
3. Schrijf deze gewone integraal als een vlakke lijnintegraal.

NIEUW DUBBEL BLAD

Vraag III.

1. Geef de formules (enkel de formules, geen uitleg) voor (i) $a(\omega)$, (ii) $b(\omega)$, (iii) de Fourierintegraal (gedaante waarin $a(\omega)$ en $b(\omega)$ voorkomen).
2. Definieer $\Gamma(x)$ voor $x > 0$ en geef ook de variante vorm. (Die variante vorm mag zonder deductie gegeven worden.)
3. Bereken $\Gamma(\frac{1}{2})$ en $\Gamma(-\frac{1}{2})$.
4. *Als f oneven is en continu over $\mathbb{R}$, dan is $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$ convergent.* Leg uit waarom dit al dan niet waar is.

(vervolgt met DEEL B)

1ste Ba Wiskunde — 10.VII.2011

Deel B (Afzonderlijk indienen)

IV. (a) Zij f holomorf in $B(z_0, R)$ $(R > 0)$. Als z_0 een ophopingspunt is van nulpunten van f, toon dan aan dat $f = 0$ op heel $B(z_0, R)$.
(b) Leid hieruit af dat $\sin(\pi + z) = -\sin z$ voor elke $z \in \mathbb{C}$. (Het resultaat voor reële z hoeft hierbij niet bewezen te worden.)

V. (a) Geef de definitie van de complexe ln (d.m.v. een contourintegraal).
(b) Toon aan dat $\ln z = \ln|z| + i \arg z$ voor elke $z \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$.
(c) Bepaal $e^{\ln z}$ voor elke $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
(d) Bepaal $\ln(e^z)$ voor elke $z \in \mathbb{C}$.
(e) Zij $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gegeven. Los op (naar de veranderlijke z): $e^z = w$.
(f) Waar is ln holomorf? Bepaal de afgeleide van ln.

Motiveer je antwoorden met bewijzen.

VI. Toon aan: als z_0 een geïsoleerd singulier punt is van f, $N \in \mathbb{N}$ $(N \geq 1)$ en $\lim_{z \to z_0}(z - z_0)^N f(z) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, dan is z_0 een pool van orde N voor f en

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(N-1)!} \lim_{z \to z_0} \left((z - z_0)^N f(z) \right)^{(N-1)}.$$

VII.

Stelling. *Een nietconstante complexe veelterm heeft minstens één complex nulpunt.*

Bewijs. We bekijken $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, met alle a_i's complex, $n \geq 1$, $a_n \neq 0$.

(i) $|P(z)|$ heeft een globaal minimum, m.a.w.

$$(\exists z_0 \in \mathbb{C})(\forall z \in \mathbb{C})(|P(z_0)| \leq |P(z)|).$$

Wegens het voorafgaande lemma kunnen we een $R > 0$ bepalen met de eigenschap dat $|P(z)| > |a_0|$ voor $|z| > R$. In de gesloten schijf $\bar{B}(0, R)$ bereikt $|P(z)|$ minstens één keer haar kleinste waarde wegens ... [1]. Er bestaat dus een $z_0 \in \bar{B}(0, R)$ waarvoor

$$(\forall z \in \bar{B}(0, R))(|P(z_0)| \leq |P(z)|).$$

In het bijzonder hebben we voor $z = 0$ dat $|P(z_0)| \leq |a_0|$. Voor $z \notin \bar{B}(0, R)$ hebben we door de definitie van R dat $|P(z)| > |a_0|$ en dus $|P(z)| > |P(z_0)|$. Vandaar is $|P(z_0)| \leq |P(z)|$ zowel in de schijf $\bar{B}(0, R)$ geldig als daarbuiten.

(ii) de functiewaarde van elk globaal minimum is 0. Definieer $P_0(z) := P(z_0 + z)$. Dan is P_0 een nietconstante veelterm en $|P_0(0)| = |P(z_0)| \leq |P_0(z)|$ voor elke $z \in \mathbb{C}$. We wensen aan te tonen dat $P_0(0) = P(z_0) = 0$ [2]. We tonen dit aan uit het ongerijmde. Veronderstel dus $P_0(0) \neq 0$. Dan is

$$Q(z) := \frac{P_0(z)}{P_0(0)} = 1 + c_m z^m + c_{m+1} z^{m+1} + \cdots + c_n z^n \quad (c_m, c_{m+1}, \ldots, c_n \in \mathbb{C}),$$

waarbij $m > 0$ de laagste macht van z is waarvoor de coëfficiënt $c_m \neq 0$. Om een strijdigheid te verkrijgen zullen we aantonen dat $z \in \mathbb{C}$ bestaat zo dat $|P_0(z)| < |P_0(0)|$, d.w.z. zo dat $|Q(z)| < 1$.

We bekijken in eerste instantie enkel de veelterm $1 + c_m z^m$. Schrijven we $z = re^{i\theta}$ in poolcoördinaten, dan is $1 + c_m z^m = 1 + c_m r^m e^{im\theta}$ wegens de formule van De Moivre.

Door θ te variëren kunnen we ervoor zorgen dat $c_m r^m e^{im\theta}$ om het even welk argument heeft; i.h.b. kunnen we θ zo kiezen dat $c_m r^m e^{im\theta} = -|c_m| r^m$ [3] (corresponderend met $\arg(c_m r^m e^{im\theta}) = \pi$). Hierdoor is $1 + c_m z^m = 1 - |c_m||z|^m \in [0, 1[$ mits $r = |z|$ voldoende klein is. Nu $\theta = \arg z$ gekozen is, kunnen we enkel $r = |z|$ nog kiezen.

Omdat $\lim_{z \to 0} c_{m+1} z + \cdots + c_n z^{n-m} = 0$, kunnen we $|z| > 0$ zo kiezen dat $|c_{m+1} z + \cdots + c_n z^{n-m}| < |c_m|$ [4]. Dan is

$$\begin{aligned} |Q(z)| &\le |1 + c_m z^m| + |z|^m |c_{m+1} z + \cdots + c_n z^{n-m}| \\ &< 1 - |c_m||z|^m + |c_m||z|^m = 1. \end{aligned}$$

[5] $\square$

[1] Wegens welke eigenschap geldt dit? Formuleer deze eigenschap (zonder bewijs). Is aan de voorwaarden voldaan om haar toe te passen?
[2] Verduidelijk de structuur van het bewijs:

- Is de gelijkheid $P_0(0) = P(z_0)$ te bewijzen, of volgt dit direct uit de gegevens?
- Is de gelijkheid $P(z_0) = 0$ te bewijzen, of volgt dit direct uit de gegevens?

[3] Leg uit waarom we θ zo kunnen kiezen dat $c_m r^m e^{im\theta} = -|c_m| r^m$.
[4] Leg uit waarom we $|z| > 0$ zo kunnen kiezen dat $|c_{m+1} z + \cdots + c_n z^{n-m}| < |c_m|$. Leg ook uit waarom dit te verzoenen is met de eerdere keuze 'mits $r = |z|$ voldoende klein is'.
[5] Waarom volgt het te bewijzen hieruit?

EINDE VAN DE THEORIE

Tijd tot 12.30. Oefeningen om 14.00, zelfde leszaal.

1ste Ba Wiskunde en Fysica-Sterrenkunde
10.VI.2011
Wiskundige Analyse II oefeningen
(45% van de punten voor Wiskunde, 40% van de punten voor Fysica-Sterrenkunde)

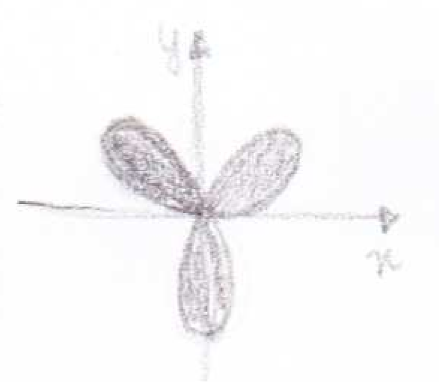
(i) Schrijf elke vraag op een apart blad.

(ii) Becommentarieer uw werkwijze.

(iii) Het gebruik van een rekenmachine is niet toegelaten.

Veel succes gewenst!

Vraag 1.



Zij T de kromme met als parametervergelijking

$$x(t) = \cos t + \sin 2t, \quad y(t) = \sin t + \cos 2t \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

1. Voor welke waarden van de parameter t snijdt T de Y-as?
2. Bereken de oppervlakte ingesloten door de drie lussen van T.

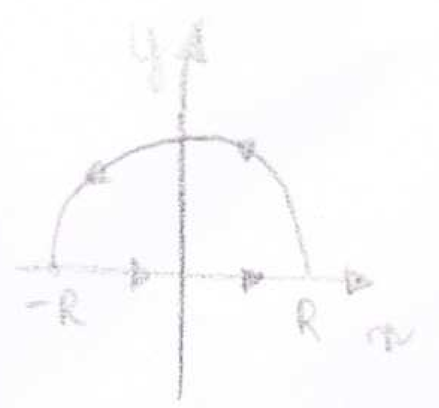
__________NIEUW DUBBEL BLAD__________

Vraag 2.

Bereken m.b.v. bolcoördinaten het volume van het deel van $\mathbb{R}^3$ begrensd door het afgesloten oppervlak met vergelijking

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2z(x^2 + y^2).$$

__________NIEUW DUBBEL BLAD__________



Vraag 3. (Enkel voor 1Ba Wiskunde) Bereken

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(\pi x)}{x^2 + 2x + 5}\, dx$$

door een geschikte complexe functie te integreren langs de contour die in het complexe vlak in rechte lijn van $(-R, 0)$ naar $(R, 0)$ loopt en via een halve cirkel in tegenwijzerzin van $(R, 0)$ terug naar $(-R, 0)$.

__________EINDE VAN DE OEFENINGEN__________

Fysica-Sterrenkunde: tijd tot 16.30
Wiskunde: tijd tot 18.00

gegeven figuren stonden op het bord voorgetekend
② moest je zelf de figuur vinden