24.I.2011

Wiskundige Analyse I, theorie (= 60% van de punten)

- *Beantwoord elk van de vragen I,II,III en IV op één van de dubbele geruite bladen. Schrijf op blad I, bovenaan de eerste bladzijde, uw naam (familienaam in drukletters) en studierichting. Stop de dubbele geruite bladen vanaf II in het dubbele geruite blad I.* Voor velen een te moeilijke opdracht.

Vraag I.

1. Definieer f^+ en f^-. Maak ook de figuren. Cursus blz. 73-74.

2. Bewijs dat, als f integreerbaar is, f^+ dat ook is. Maak ook de figuren. Het integrandum hoeft niet continu te zijn. Men kan dus niet spreken van een *grootste waarde* of *maximum* in het k-de interval. Een eenvoudig 'bewijs' krijgt men door het integratie-interval op te splitsen in een eindig aantal intervallen waarin f een vast teken zou hebben, maar dat is zelfs voor een continu integrandum niet altijd mogelijk. Sommigen geven de figuren niet, hoewel het bewijs dan onmogelijk begrepen kan worden.

3. Bewijs de driehoeksongelijkheid voor $\int_a^b f$ met $a < b$.

4. Geef (zonder bewijs) de algemene driehoeksongelijkheid, ook geldig voor $b < a$. Deze vraag is het vervolg van de vorige, en gaat natuurlijk over de driehoeksongelijkheid *voor integralen*. De toevoegingen 'algemene' en 'voor $b < a$' maken dat nog extra duidelijk. In de cursus vindt men (b.v. in het bewijs van 6.3.1) eveneens 'driehoeksongelijkheid' met de betekenis 'driehoeksongelijkheid voor integralen'.

Vraag II.

1. Formuleer en bewijs de regel van Raabe. Cursus blz. 141-142. 'Bewijzen' m.b.v. de regel van d'Alembert lukt niet omdat de limiet $\leqslant 1$ of $\geqslant 1$ uitkomt, in beide gevallen zonder conclusie dus. Velen beweren dat $\mu < 1$ impliceert dat de algemene term niet nul wordt, maar dat is bij Raabe niet zo. Velen geven voor de partieelsommen een 'bovengrens' die nog de veranderlijke term kx_k bevat; een bovengrens moet *constant* zijn, vandaar de laatste stap op blz. 141.

2. Geef (zonder bewijs) de absolute regel van Raabe. De absolute-waardestrepen moeten rond de termen van de reeks staan, niet rond de hele uitdrukking.

Vraag III.

1. Geef, met voorwaarden maar zonder bewijs, de Taylorformule met integraalgedaante van de restterm. Cursus blz. 160. Sommigen voegen aan de C^n-voorwaarde allerlei overbodigs toe, b.v. continu, afleidbaar, integreerbaar.

2. Bewijs de formule voor functies van klasse C^1. Sommigen beginnen met de formule en deduceren daaruit $f(x) = f(x)$. Eigenaardige logica!

3. Bewijs de formule voor functies van klasse C^2.

4. Pas de formule toe op de functie $g(x) = \int_{x_0}^x \left(\int_{x_0}^t f\right) dt$ met f continu. Cursus blz. 181, waar die functie $I^{\{2\}}(x)$ heet. Door de eerste hoofdstelling is $g'(x) = \int_{x_0}^x f$ en $g''(x) = f(x)$. De functie g is van de klasse C^2 wegens f continu, maar meer weten we niet. De Taylorformule kan dus enkel tot $n = 2$ gegeven worden.

Vraag IV. *Beantwoord met JA of NEEN (enkel J of N, niets anders):*

1. ϖ is een 'omega' NEEN, dat is een 'pi', cursus blz. 6.

2. Als $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ is, dan is $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. NEEN. Er staat in heel de cursus niets dat dit garandeert zonder bijkomende voorwaarden, en het is ook niet juist, zie cursus onderaan blz. 158.

3. $\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots = \frac{1}{9} + \frac{1}{4} + \frac{1}{25} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n^2} + \ldots$ JA. De reeks convergeert (hyperharmonische reeks met exponent 2, zonder de beginterm) en convergeert dan uiteraard *absoluut* omdat zij uit positieve termen bestaat. Omschikking van termen is dus toegestaan.

4. $1 + (1-i) + (1-i)^2 + (1-i)^3 + \ldots$ is convergent. NEEN. Meetkundige reeks met reden $1-i$, waarvan de modulus $\sqrt{2} > 1$ is.

5. Als het integratie-interval vergroot ($\subset$) wordt, dan vergroot ($\leqslant$) de integraal. NEEN. Enkel als het integrandum $\geqslant 0$ is, zie cursus blz. 70.

1. Geef de Taylorbenadering van orde 6 met centraal punt 0 voor $\frac{1}{\cos^2 x}$. Dit kan op verschillende manieren, maar één is voldoende.

2. Onderzoek de convergentie van de reeks $\sum_{n\geq 1} a^{\sqrt{n}}$ $(a \geq 0)$.

3. Geef de Fourierontwikkeling t.o.v. $[-\pi, \pi]$ van de functie $f(x) = e^x$ en leid daaruit de reekssom $\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \frac{1}{26} + \frac{1}{37} + \frac{1}{50} + \frac{1}{65} + \ldots$ af.

4. Los $y(x)$ op uit $y'' - y' + \frac{y}{4} = \sqrt{e^x} \ln(x^2 + 1)$.

Veel succes!

De eerste, derde en vierde vraag werden over het algemeen vrij goed beantwoord. De tweede een heel pak minder. Vandaar een beetje extra uitleg.
De reeks convergeert duidelijk voor $a = 0$. Voor $a > 1$ naderen de termen niet naar 0 en is de reeks derhalve divergent. Om in te zien dat de reeks convergeert voor $0 < a < 1$, zijn er verschillende manieren – niet de worteltest of de convergentieregel van d'Alembert: die geven geen uitsluitsel.

- Quotiëntregel: $\lim_{n\to\infty} \frac{a^{\sqrt{n}}}{1/(\sqrt{n})^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n})^3}{a^{-\sqrt{n}}} = \ldots = 0$. Hierin wordt drie keer de regel van de l'Hospital gebruikt (eventueel na de limiet eerst te herschrijven als $\lim_{k\to\infty} \frac{k^3}{a^{-k}}$). Aangezien $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(\sqrt{n})^3}$ convergeert (hyperharmonische reeks met exponent 3/2), convergeert ook $\sum_{n\geq 1} a^{\sqrt{n}}$. Deze regel kan ook toegepast worden met bijvoorbeeld $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ in plaats van $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(\sqrt{n})^3}$.

- Integraaltest: de functie $a^{\sqrt{x}}$ is dalend en naar onder begrensd door 0, en $\int_1^n a^{\sqrt{x}}\,dx = \frac{2}{\ln^2 a}((\ln a)\sqrt{n}a^{\sqrt{n}} - a^{\sqrt{n}} + a(1 - \ln a))$. De limiet hiervan (voor n naderend naar $+\infty$) bestaat en is een reëel getal, namelijk $\frac{2a(1-\ln a)}{\ln^2 a}$ (voor de eerste term kan de limiet analoog berekend worden als hierboven uitgelegd bij 'Quotiëntregel'). Omdat de rij integralen convergeert, convergeert ook de gevraagde reeks.

- Convergentieregel van Raabe: $\lim_{n\to\infty} n(\frac{a^{\sqrt{n}}}{a^{\sqrt{n+1}}} - 1) = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}-1}{1/n}$. Omdat $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} - \sqrt{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = 0$, zien we dat we op die limiet de regel van de l'Hospital kunnen toepassen. Dit geeft $\lim_{n\to\infty} n(\frac{a^{\sqrt{n}}}{a^{\sqrt{n+1}}} - 1) = \lim_{n\to\infty} \frac{-\ln a}{2} a^{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}} n^2 (\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}) = \frac{-\ln a}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})} = \frac{-\ln a}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(1+1/n)}(\sqrt{1}+\sqrt{1+1/n})} = +\infty$. Aangezien deze limiet groter is dan 1, convergeert de gevraagde reeks.

Enkele opmerkingen

- $a^{\sqrt{n}}$ is NIET hetzelfde als $a^{n/2}$

- Als $a < 1$, is a^n een DALENDE functie in n.
- Als $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ en $\sum_{n\geq 1} a_n$ is convergent (of $\sum_{n\geq 1} b_n$ divergent), dan kan je daaruit NIETS besluiten over eventuele convergentie van $\sum_{n\geq 1} b_n$ (of divergentie van $\sum_{n\geq 1} a_n$).